Cohomología Weil-étale de esquemas aritméticos

Alexey Beshenov

15/06/2021

V Encuentro Conjunto de
la Real Sociedad Matemática Española
y
la Sociedad Matemática Mexicana

Plan de charla

1. **Motivación**: esquemas aritméticos, funciones zeta, valores especiales y su interpretación cohomológica.
2. **Programa Weil-étale de Lichtenbaum**: ideas y resultados principales.
3. **Mi trabajo**: conjeturas y resultados incondicionales.
4. **Preguntas para el futuro**.

Motivación (motívica)

Funciones zeta aritméticas y sus valores especiales

- **Esquema aritmético** X = separado, de tipo finito sobre $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.
- **Función zeta**:

$$X \rightsquigarrow \zeta(X,s) = \prod_{\substack{x\in X\\ \text{cerrado}}} \frac{1}{1-\#\kappa(x)^{-s}}$$

- Convergencia para $s > \dim X$.
- Conjetura: prolongación meromorfa a $s \in \mathbb{C}$.
- Fijemos $n \in \mathbb{Z}$.
- $\operatorname{ord}_{s=n} \zeta(X,s) = d_n :=$ **orden de anulación** en $s = n$.
- **Valor especial**: $\zeta^*(X,n) := \lim_{s\to n}(s-n)^{-d_n}\,\zeta(X,s)$.

Ejemplos extensivamente estudiados

- **Función zeta de Dedekind** (siglo XIX).
  $F/\mathbb{Q}$ cuerpo de números, $\mathcal{O}_F \subset F$ anillo de enteros.

$$\zeta_F(s) := \zeta(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_F, s) \overset{\text{Euler}}{=} \sum_{0 \neq \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_F} \frac{1}{\#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a})^s}.$$

  E.g. $\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \zeta(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}, s) = \zeta(s)$.
- **Función zeta de Hasse–Weil** (siglo XX).
  $X/\mathbb{F}_q$ variedad sobre cuerpo finito.

$$Z(X, t) := \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{\#X(\mathbb{F}_{q^k})}{k}\, t^k\right) \overset{\text{Dwork}}{\in} \mathbb{Q}(t).$$

$$\zeta(X, s) = Z(X, q^{-s}).$$

  Conjeturas de Weil (Grothendieck, Deligne, ...)

Cohomología motívica étale

- Lichtenbaum, 1984: complejos hipotéticos (!) de haces sobre $X_{\acute{e}t}$ responsables por los valores especiales.
- Bloch, 1986: complejos de ciclos / grupos de Chow superiores.
- Versión étale: complejo de haces $\mathbb{Z}^c(n)$ sobre $X_{\acute{e}t}$.
- Funciona para $X/\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ (Levine, Geisser, ...).
- Para X propio, regular, $d = \dim X$:

$$\underbrace{H^i(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}^c(n))}_{\text{coh. de Borel–Moore motívica}} \cong \underbrace{H^{i+2d}(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}(d-n))}_{\text{coh. motívica habitual}}.$$

- Pocos cálculos explícitos disponibles.
- **Gran conjetura** (Lichtenbaum): $H^i(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}^c(n))$ son finitamente generados, o $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-duales a finitamente generados.

Conjetura cohomológica de Lichtenbaum

- $n \le 0$.
- $d_n = \operatorname{ord}_{s=n} \zeta_F(s) = \operatorname{rk}_{\mathbb{Z}} H^{-1}(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{F,ét}, \mathbb{Z}^c(n)) =$
$$\begin{cases} r_1 + r_2 - 1, & n = 0, \\ r_1 + r_2, & n < 0 \text{ par}, \\ r_1, & n < 0 \text{ impar}. \end{cases}$$
- **Conjetura** (teorema para $F/\mathbb{Q}$ abeliano): para $n \le 0$
$$\zeta_F^*(n) = \pm \frac{\# H^0(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n))}{\# H^{-1}(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n))_{tors}} \, R_{F,n}.$$
- $n = 0 \iff$ **fórmula analítica del número de clases** (Dirichlet).
- En términos de $K_i(\mathcal{O}_F)$, para F real, n impar ($R_{F,n} = 1$): Lichtenbaum, 1973.
- **Reguladores superiores**: Borel, Beilinson:
$$R_{F,n} = \operatorname{vol} \operatorname{coker}\Big(\underbrace{H^{-1}(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n))}_{\operatorname{rk}_{\mathbb{Z}} = d_n} \to \underbrace{H^1_{\mathcal{D}}(G_{\mathbb{R}}, X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n))}_{\dim_{\mathbb{R}} = d_n}\Big).$$

Cohomología Weil-étale

Cohomología Weil-étale (Lichtenbaum)

- Cohomología motívica étale $\rightsquigarrow$ cohomología Weil-étale.
- Grupos $H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))$ finitamente generados, nulos para $|i| \gg 0$.
- Sucesión exacta

$$\cdots \to H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\smile \theta} H^{i+1}_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)) \otimes \mathbb{R} \to \cdots$$

- $H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))$ codifica $\operatorname{ord}_{s=n} \zeta(X, s)$ y $\zeta^*(X, n)$.

Algunos resultados

- «Resultado» =
  - definir $H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))$ asumiendo las conjeturas de Lichtenbaum sobre estructura de cohomología motívica,
  - formular la relación conjetural de $H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))$ con $\operatorname{ord}_{s=n} \zeta(X, s)$ y $\zeta^*(X, n)$,
  - establecer relaciones con otras conjeturas, probar casos particulares.
- Lichtenbaum (2005): $X/\mathbb{F}_q$.
- Geisser (2004–...): $X/\mathbb{F}_q$, posiblemente singular.
- Lichtenbaum (2009): $X = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_F$.
- Morin (2014): $X/\mathbb{Z}$ propio y regular, $n = 0$.
- Flach, Morin (2018): ——————, $n \in \mathbb{Z}$.
- B. (2020/21): cualquier esquema aritmético $X/\mathbb{Z}$, $n < 0$.

Mi trabajo

Complejos Weil-étale

- $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ esquema aritmético (= separado, de tipo finito).
- $n < 0$.
- Asumamos $\mathbf{L}^c(X_{ét}, n)$: los grupos $H^i(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n))$ son finitamente generados para todo $i \in \mathbb{Z}$ y $n < 0$.
- Existe un complejo perfecto $R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$.
- Los grupos

$$H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)) := H^i(R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)))$$

son finitamente generados, nulos para $i \notin [0, 2\dim X + 1]$.

Conjetura del orden de anulación

Asumiendo $\mathbf{L}^c(X,n)$, conjeturamos $\mathbf{VO}(X,n)$:

$$\operatorname{ord}_{s=n} \zeta(X,s) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \cdot i \cdot \operatorname{rk}_{\mathbb{Z}} H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n)).$$

Conjetura del valor especial

- Se define, usando reguladores,

$$\lambda\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} \underbrace{(\det_{\mathbb{Z}} R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n)))}_{\mathbb{Z}\text{-módulo de rk 1}} \otimes \mathbb{R}.$$

- Asumamos
  - $\mathbf{L}^c(X_{ét}, n)$: generación finita de $H^i(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n))$,
  - fibra $X_{\mathbb{C}}$ lisa,
  - $\mathbf{B}(X, n)$: conjetura de Beilinson sobre reguladores,
  - prolongación meromorfa alrededor de $s = n < 0$.
- $\mathbf{C}(X, n)$: el valor especial en $s = n$ se determina salvo signo por

$$\lambda(\zeta^*(X,n)^{-1}) \cdot \mathbb{Z} = \det_{\mathbb{Z}} R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n)).$$

Ejemplo: variedades sobre cuerpos finitos

- $\mathbf{C}(X, n)$ es equivalente a la fórmula

$$\zeta(X, n) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} |H^i(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n))|^{(-1)^i}.$$

- Se cumple, asumiendo $\mathbf{L}^c(X_{ét}, n)$.
- $\implies$ finitud de $H^i(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n))$, anulación para $|i| \gg 0$.
- Explicación: la fórmula de traza de Grothendieck.

Aplicación: esquemas unidimensionales

- **Teorema** (B.): Sea B un esquema aritmético 1-dimensional. Asumamos que para todo punto genérico $\eta \in B$ se cumple uno de los dos:
  a) $\operatorname{char} \kappa(\eta) = p > 0$;
  b) $\operatorname{char} \kappa(\eta) = 0$ y $\kappa(\eta)/\mathbb{Q}$ es un cuerpo de números abeliano.

  Entonces, se cumple $\mathbf{VO}(B, n)$ y $\mathbf{C}(B, n)$.
- Cálculos de $H^i_{W,c}(B_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}(n)) \Longrightarrow$

$$\zeta^*(B, n) = \pm 2^\delta \frac{|H^0(B_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}^c(n))|}{|H^{-1}(B_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}^c(n))_{tors}| \cdot |H^1(B_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}^c(n))|} R_{B,n},$$

$$\delta = \delta_{B,n} = \begin{cases} |B(\mathbb{R})|, & n \text{ par}, \\ 0, & n \text{ impar}, \end{cases}$$

$$R_{B,n} := \text{regulador sobre } H^{-1}(B_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}^c(n)).$$

Aplicación: esquemas celulares

- Esquema **celular** $X \to B$: admite filtración por cerrados

  $$X = Z_N \supseteq Z_{N-1} \supseteq \cdots \supseteq Z_0 \supseteq Z_{-1} = \emptyset,$$

  donde $Z_i \setminus Z_{i-1} \cong \coprod_j \mathbb{A}_B^{r_{i_j}}$
- **Teorema** (B.): Sea B un esquema aritmético 1-dimensional abeliano.
  Entonces, $\mathbf{VO}(X, n)$ y $\mathbf{C}(X, n)$ se cumplen para todo $n < 0$ y todo esquema aritmético B-celular X con la fibra $X_{\mathbb{C}}$ lisa.
- Idea: $\mathbf{C}(X, n)$ se conoce para curvas y cuerpos de números abelianos $F/\mathbb{Q}$ (¡via TNC!). Proceder por dévissage.

Algunas preguntas para el futuro

- Regulador para la fibra $X_{\mathbb{C}}$ singular.
- Cuando la comparación tiene sentido, $\mathbf{C}(X, n)$ es equivalente a la TNC.
  ¿Cómo formular un análogo equivariante compatible con la ETNC?
- Valores especiales de funciones $L(\mathcal{F}, s)$ para haces $\mathbb{Z}$-constructibles $\mathcal{F}/X$ (Thomas Geisser, Takashi Suzuki).

¡Gracias por su atención!