# Teoría de números algebraicos
# Examen final

**Alexey Beshenov (alexey.beshenov@cimat.mx)**

**9 de diciembre de 2020**

*Fecha límite: 16 de diciembre de 2020.*

**Ejercicio 1.** Consideremos el polinomio $f = x^3 + 5x^2 - x - 4$.

0) Demuestre que $f$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$. Sea $K = \mathbb{Q}[x]/(f)$.

1) Calcule el anillo de enteros $\mathcal{O}_K$ y discriminante $\Delta_K$.

2) Demuestre que $u_1 = \alpha + 1$ y $u_2 = \alpha - 1$, donde $\alpha = x \mod f$, son unidades en $\mathcal{O}_K^\times$. Asumiendo que $u_1$ y $u_2$ generan la parte libre de $\mathcal{O}_K^\times$, calcule el regulador.

3) Calcule el grupo de clases $\mathrm{Cl}(K)$.

4) Usando la fórmula analítica del número de clases[*], compruebe que $u_1$ y $u_2$ son efectivamente unidades fundamentales.

**Ejercicio 2.** Para un campo de números $K/\mathbb{Q}$ demuestre que la cerradura de Galois $L/K$ contiene como subcampo $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta_K})$. Dé un ejemplo particular cuando $\Delta_K$ no es un cuadrado y $K \neq \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta_K})$.

**Ejercicio 3.** Sea $k > 0$ un entero positivo libre de cuadrados. Supongamos que $k \equiv 1, 2 \pmod 4$ y $k$ no tiene forma $3a^2 \pm 1$ para $a \in \mathbb{Z}$. Demuestre que si $3 \nmid h_{\mathbb{Q}(\sqrt{-k})}$, entonces la ecuación $y^2 = x^3 - k$ no tiene soluciones enteras.

Punto extra: encuentre un contraejemplo para $3 \mid h_{\mathbb{Q}(\sqrt{-k})}$.

**Ejercicio 4.** Dada una extensión ciclotómica $\mathbb{Q}(\zeta_m)$, sean $X \subseteq \widehat{(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times}$ un grupo de caracteres de Dirichlet y $K \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_m)$ el subcampo correspondiente. Demuestre que $K$ es un campo real (es decir, $r_2 = 0$) si y solamente si $\chi(-1) = +1$ para todo $\chi \in X$.

**Ejercicio 5.** Consideremos el campo cuadrático real $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

1) Calcule el residuo de $\zeta_K(s)$ en $s = 1$.

2) Exprese $\zeta_K(s)$ como un producto de series L de Dirichlet.

3) Calcule los valores $\zeta_K(0)$, $\zeta_K(-1)$, $\zeta_K(-2)$, $\zeta_K(-3)$.

4) Calcule los valores $\zeta_K(2)$ y $\zeta_K(4)$.

[*] El residuo de $\zeta_K(s)$ en $s = 1$ puede ser calculado en PARI/GP.