Cohomología de grupos, día 1

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

30 de agosto de 2016

Hay varios modos de definir la cohomología y homología de grupos. Ya hemos estudiado la teoría general de funtores derivados, así que podemos empezar por las definiciones abstractas y después comprender cómo se hacen cálculos explícitos.

1. Cohomología de grupos

A partir de ahora, G va a denotar un grupo, no necesariamente abeliano, y A un grupo abeliano.

1.1. Definición. Se dice que A es un G**-módulo** si tenemos una acción $G \times A \to A$

$$\begin{gathered} 1 \cdot a = a \text{ para todo } a \in A, \\ g_1 \cdot (g_2 \cdot a) = (g_1\, g_2) \cdot a \text{ para todo } a \in A,\ g_1, g_2 \in G, \end{gathered}$$

que es compatible con la operación en A, es decir,

$$g \cdot (a_1 + a_2) = g \cdot a_1 + g \cdot a_2 \text{ para todo } a_1, a_2 \in A,\ g \in G.$$

Un **morfismo de** G**-módulos** $f\colon A \to B$ (o morfismo G**-equivariante**) es un homomorfismo de grupos abelianos que preserva las acciones de G, es decir, $f(g \cdot a) = g \cdot f(a)$ para todo $g \in G$ y $a \in A$.

1.2. Ejemplo. En teoría de números, muy a menudo se considera una extensión de cuerpos L/K y el módulo $A := L^\times$ con acción del grupo de Galois $G = \operatorname{Gal}(L/K)$. Noten que la operación en $L^\times$ es multiplicativa, aunque en nuestras construcciones generales la operación de A se denota por "$+$". ▲

1.3. Ejemplo. Un G-módulo **trivial** A es un grupo abeliano con acción definida por $g \cdot a = a$ para todo $g \in G$ y $a \in A$. ▲

Los G-módulos forman una categoría, pero ya la conocemos bien:

1.4. Observación. *El **anillo** $\mathbb{Z}[G]$ **del grupo** G es el anillo que consiste en sumas formales finitas de elementos de g con coeficientes en $\mathbb{Z}$, es decir*

$$\sum_{g \in G} a_g\, g \text{ donde } a_g \in \mathbb{Z}.$$

Las operaciones están inducidas por la $\mathbb{Z}$-linealidad y la multiplicación en G:

$$\begin{gathered} \sum_{g \in G} a_g\, g + \sum_{g \in G} b_g\, g = \sum_{g \in G} (a_g + b_g)\, g, \\ \left(\sum_{g \in G} a_g\, g\right) \cdot \left(\sum_{g \in G} b_g\, g\right) = \sum_{g \in G} \big(\sum_{h \in G} a_h\, b_{h^{-1}g}\big)\, g. \end{gathered}$$

Entonces la categoría de G-módulos es isomorfa a la categoría $\mathbb{Z}[G]$-**Mód** *de módulos sobre el anillo $\mathbb{Z}[G]$.*

Demostración. La acción de G sobre A es compatible con la estructura de grupo abeliano sobre A (acción de $\mathbb{Z}$); entonces considerando sumas formales de elementos de G, se obtiene esencialmente la misma cosa. ■

La construcción del anillo $\mathbb{Z}[G]$ es canónica en el sentido de que hay una adjunción

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}[G], R) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, R^\times).$$

Aquí hay un detalle que suele causar confusión: si G no es conmutativo, el anillo $\mathbb{Z}[G]$ no es conmutativo, y hay que tener cuidado con módulos por la izquierda y por la derecha. Sin embargo, el anillo $\mathbb{Z}[G]$ tiene una involución definida por $g \mapsto g^{-1}$ para $g \in G$, gracias a la cual todo $\mathbb{Z}[G]$-módulo con acción por la izquierda A se vuelve un módulo con acción por la derecha $a \cdot g := g^{-1} \cdot a$. Esto permite para dos $\mathbb{Z}[G]$-módulos por la izquierda A y B considerar $A \otimes_{\mathbb{Z}[G]} B$ y $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}[G]}(A, B)$, como módulos por la izquierda. Por el momento, nos van a interesar solamente los casos triviales de $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$ y $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$, donde $\mathbb{Z}$ se considera como el módulo con la acción trivial de $\mathbb{Z}[G]$.

1.5. Definición. El **morfismo de aumento** es el morfismo $\epsilon\colon \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ definido por

$$\epsilon\left(\sum_{g\in G} a_g\, g\right) := \sum_{g\in G} a_g.$$

Notemos que este es un epimorfismo G-equivariante, donde $\mathbb{Z}$ se considera como un módulo trivial. El núcleo de este morfismo se llama el **ideal de aumento**:

$$I_G := \ker \epsilon.$$

1.6. Observación. *I_G es generado sobre $\mathbb{Z}$ por los elementos de la forma $g-1$ para todo $g \in G$.*

Demostración. Obviamente, $g - 1 \in \ker \epsilon$, y si $\epsilon(\sum_{g\in G} a_g\, g) = 0$, podemos escribir

$$\sum_{g\in G} a_g\, g = \sum_{g\in G} a_g\, g - \underbrace{\sum_{g\in G} a_g}_{=0} = \sum_{g\in G} a_g\,(g-1).$$

■

1.7. Definición. Para un $\mathbb{Z}[G]$-módulo A, el submódulo de G**-invariantes** (o de los **puntos fijos**) es dado por

$$A^G := \{a \in A \mid g \cdot a = a \text{ para todo } g \in G,\ a \in A\}.$$

El módulo de G**-coinvariantes** es dado por

$$A_G := A/I_G A.$$

Notemos que A^G es el submódulo máximo de A fijo bajo la acción de G y A_G es el cociente máximo de A fijo bajo la acción de G (gracias a la observación 1.6).

1.8. Ejemplo. Si A es trivial, entonces $A^G = A$, $I_G A = 0$ y $A_G \cong A$. ▲

1.9. Ejemplo. Para el módulo libre $\mathbb{Z}[G]$

$$\mathbb{Z}[G]_G \cong \mathbb{Z}$$

(el morfismo $\epsilon\colon \mathbb{Z}[G] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ es epi y por la definición, $\mathbb{Z}[G]_G := \mathbb{Z}[G]/I_G$ donde $I_G := \ker \epsilon$). G actúa sobre $\mathbb{Z}[G]$ por permutaciones de elementos, y por lo tanto $\sum_{g\in G} a_g\, g$ es fijo si y solamente si los coeficientes a_g son iguales para todo $g \in G$. En el caso de un grupo finito, el elemento de $\mathbb{Z}[G]$

$$N := \sum_{g\in G} g$$

se llama el **elemento de norma**, y los $\mathbb{Z}$-múltiplos de N son precisamente los elementos de $\mathbb{Z}[G]^G$. Si G es infinito, $\mathbb{Z}[G]$ no tiene puntos fijos no triviales. En conclusión,

$$\mathbb{Z}[G]^G = \begin{cases} \mathbb{Z}\cdot N, & G \text{ finito,} \\ 0, & G \text{ infinito} \end{cases}$$

▲

Un morfismo de $\mathbb{Z}[G]$-módulos $f\colon A \to B$ induce de modo funtorial morfismos $f|_{A^G}\colon A^G \to B^G$ (restricción de f a los puntos fijos) y $\overline{f}\colon A_G \to B_G$. Así que tenemos funtores aditivos $(-)^G$ y $(-)_G$ sobre la categoría $\mathbb{Z}[G]$-Mód. *Vamos a ignorar las acciones de G sobre A^G y A_G y considerar estos funtores como* $\mathbb{Z}[G]$**-Mód** $\to$ **Ab**. Se puede ver que $(-)^G$ es exacto por la izquierda y $(-)_G$ es exacto por la derecha; específicamente, son casos particulares de funtores que ya conocemos muy bien: el $\underline{\mathrm{Hom}}$ covariante y el producto tensorial.

1.10. Observación. *Hay isomorfismos naturales*

$$\begin{aligned} A^G &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A), \\ A_G &\cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A, \end{aligned}$$

donde $\mathbb{Z}$ denota el $\mathbb{Z}[G]$-módulo correspondiente con la acción trivial de G.

Demostración. Todo morfismo G-equivariante $f\colon \mathbb{Z} \to A$ corresponde a un elemento $f(1) =: a \in A$ y luego $g\cdot a = g\cdot f(1) = f(g\cdot 1) = f(1) = a$. Entonces, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ corresponde naturalmente a A^G.

Ya que tenemos un producto tensorial, es natural escribir la acción trivial de $\mathbb{Z}[G]$ sobre $\mathbb{Z}$ *a la derecha*. El isomorfismo $A_G \cong \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$ es dado por $\overline{a} \mapsto 1\otimes a$, donde $\overline{a} := a \pmod{I_G A}$. Este morfismo está bien definido, porque para $g\cdot a - a \in I_G$ tenemos

$$g\cdot a - a \mapsto 1\otimes g\cdot a - 1\otimes a = 1\cdot g\otimes a - 1\otimes a = 1\otimes a - 1\otimes a = 0.$$

El morfismo inverso $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \to A_G$ está definido por $n\otimes a \mapsto n\,\overline{a}$. ■

El funtor (covariante) $(-)^G \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, -)$ es exacto por la izquierda y el funtor $(-)_G \cong \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}[G]} -$ es exacto por la derecha, y por lo tanto podemos considerar los funtores derivados correspondientes:

1.11. Definición. La **cohomología de** G con coeficientes en A es

$$H^n(G, A) := (R^n(-)^G)(A) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A).$$

La **homología de** G **con coeficientes en** A es

$$H_n(G, A) := (L_n(-)_G)(A) \cong \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A).$$

A partir de estas definiciones no está muy claro cómo calcular $H^n(G,A)$ y $H_n(G,A)$ para un G-módulo específico A; no obstante, tenemos automáticamente las sucesiones exactas largas:

1.12. Observación. *Cada sucesión exacta corta de $\mathbb{Z}[G]$-módulos*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

induce de manera natural una sucesión exacta larga de cohomología

$$0 \to A^G \to B^G \to C^G \xrightarrow{\delta_0} H^1(G,A) \to H^1(G,B) \to H^1(G,C) \xrightarrow{\delta_1} H^2(G,A) \to \cdots$$

y una sucesión exacta larga de homología

$$\cdots \to H_2(G,C) \xrightarrow{\delta^2} H_1(G,A) \to H_1(G,B) \to H_1(G,A) \xrightarrow{\delta^1} A_G \to B_G \to C_G \to 0$$

2. Cohomología de grupos cíclicos

Ahora tenemos que aprender a calcular $H^n(G,A)$ y $H_n(G,A)$. Por supuesto, el funtor $H^n(G,A) := (R^n(-)^G)(A)$ puede ser calculado mediante una resolución inyectiva $A \rightarrowtail I^\bullet$ y el funtor $H_n(G,A) := (L^n(-)_G)(A)$ mediante una resolución proyectiva $P^\bullet \twoheadrightarrow A$. Pero gracias a las identificaciones $H^n(G,A) \cong \operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A)$ y $H_n \cong \operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A)$, también podemos usar una resolución $P^\bullet \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}[G]$-módulos proyectivos y luego calcular la (co)homología de complejos $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P^\bullet, A)$ y $P^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$ respectivamente (recuerden el "balanceo de los Ext y Tor"). Hay una construcción general de resoluciones libres (en particular, proyectivas) de $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}[G]$-módulos que vamos a ver en la siguiente sección, pero ahora me gustaría analizar un par de ejemplos donde la resolución se construye "a mano".

Podemos empezar por el morfismo de aumento $\epsilon\colon \mathbb{Z}[G] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, que es epi y su núcleo es por la definición I_G, que es un $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por los $g-1$ para $g \in G$. Esto no quiere decir que I_G sea libre como un $\mathbb{Z}[G]$-módulo, pero es cierto cuando G es un grupo libre; en particular, es algo obvio si $G = \mathbb{Z}$ es un grupo libre con un generador:

2.1. Ejemplo. Si $G = \mathbb{Z}$ es el grupo cíclico infinito generado por t, entonces el anillo $\mathbb{Z}[G]$ es isomorfo al anillo de polinomios de Laurent $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$, y en estos términos, el morfismo de aumento ϵ es la evaluación $f \mapsto f(1)$, y tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \to \mathbb{Z}[t,t^{-1}] \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[t,t^{-1}] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

Luego la homología $H^n(\mathbb{Z},A)$ y cohomología $H_n(\mathbb{Z},A)$ se calculan como la homología del complejo $0 \to \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[G] \to 0$ después de aplicar $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(-,A)$ y $-\otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$ respectivamente. El resultado es el mismo, pero la numeración es diferente, ya que $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(-,A)$ cambia la dirección de las flechas.

$$H^n(\mathbb{Z},A) \cong H_n[0 \to \underset{0}{A} \xrightarrow{t-1} \underset{1}{A} \to 0] \cong \begin{cases} A^G = \ker(A \xrightarrow{t-1} A), & n = 0, \\ A_G = A/(t-1)A, & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

$$H_n(\mathbb{Z},A) \cong H^n[0 \to \underset{1}{A} \xrightarrow{t-1} \underset{0}{A} \to 0] \cong \begin{cases} A_G = A/(t-1)A, & n = 0, \\ A^G = \ker(A \xrightarrow{t-1} A), & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

▲

2.2. Ejemplo. Sea C_m un grupo cíclico de orden finito m generado por un elemento t. Tenemos una resolución periódica por $\mathbb{Z}[C_m]$-módulos libres

$$(*) \qquad \cdots \to \mathbb{Z}[C_m] \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[C_m] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[C_m] \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[C_m] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

—aquí N es el elemento de norma $\sum_{0\le i\le n-1} t^i$. Antes de justificar esta resolución, observemos que para cualquier grupo finito G

1) I_G es el núcleo de la acción por N sobre $\mathbb{Z}[G]$:

$$I_G = \ker(\mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G]),$$

—de hecho, para un elemento $\sum_{g\in G} a_g\, g \in \mathbb{Z}[G]$ tenemos

$$N \cdot (\sum_{g\in G} a_g\, g) = \sum_{g\in G} \left(\sum_{h\in G} a_h \right) g = 0.$$

2) El morfismo natural

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}\cdot N = (\mathbb{Z}[G])^G & \longrightarrow & (\mathbb{Z}[G])_G & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z} \\ n \sum_{g\in G} g & \longmapsto & \sum_{g\in G} g \quad \text{mód } I_G & & \\ & & \sum_{g\in G} a_g\, g \quad \text{mód } I_G & \longmapsto & \sum_{g\in G} a_g \end{array}$$

aplica $N = \sum_{g\in G} 1\cdot g$ en $\#G \in \mathbb{Z}$. En particular, este es un monomorfismo.

Las observaciones 1) y 2) nos dan sucesiones exactas cortas de $\mathbb{Z}[C_m]$-módulos

$$0 \to I_{C_m} \to \mathbb{Z}[C_m] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}\cdot N \to 0 \quad \text{y} \quad 0 \to \mathbb{Z}\cdot N \to \mathbb{Z}[C_m] \xrightarrow{t-1} I_{C_m} \to 0$$

Uniendo estas dos sucesiones exactas cortas, se obtiene la sucesión exacta (*):

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}[C_m] \arrow[rr, dashed, "t-1"] \arrow[dr, "t-1"'] & & \mathbb{Z}[C_m] \arrow[rr, dashed, "N"] \arrow[dr, "N"'] & & \mathbb{Z}[C_m] \arrow[r] & \cdots \\ & & I_{C_m} \arrow[ur, tail] & & \mathbb{Z}\cdot N \arrow[ur, tail] & & \end{tikzcd}$$

Para calcular $H^n(C_m, A)$, tenemos que aplicar el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[C_m]}(-, A)$ a (*) y calcular la homología del complejo obtenido:

$$0 \to A \xrightarrow{t-1} A \xrightarrow{N} A \xrightarrow{t-1} A \xrightarrow{N} A \to \cdots$$

$$H^n(C_m, A) = \begin{cases} A^G = \ker(A \xrightarrow{t-1} A), & n = 0, \\ \{a \in A \mid N\cdot a = 0\}/(t-1)A, & n > 0 \text{ impar}, \\ A^G/NA, & n > 0 \text{ par}. \end{cases}$$

Para calcular $H_n(C_m, A)$, tenemos que aplicar el funtor $-\otimes_{\mathbb{Z}[C_m]} A$ y calcular la cohomología del complejo correspondiente

$$\cdots \to A \xrightarrow{t-1} A \xrightarrow{N} A \xrightarrow{t-1} A \to 0$$

$$H_n(C_m, A) = \begin{cases} A_G = A/(t-1)A, & n = 0, \\ A^G/NA, & n > 0 \text{ impar}, \\ \{a \in A \mid N \cdot a = 0\}/(t-1)A, & n > 0 \text{ par}. \end{cases}$$

▲

2.3. Ejemplo. Calculemos $H^n(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \mathbb{C}^\times)$. El grupo $G := \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ es cíclico de grado 2, generado por la conjugación compleja $z \mapsto \overline{z}$. Tenemos

$$H^0(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \mathbb{C}^\times) = A^G = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid z = \overline{z}\} = \mathbb{R}^\times.$$

La norma $N\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ es definida por $N(z) = z \cdot \overline{z} = |z|^2$ y luego,

$$H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \mathbb{C}^\times) \cong \frac{\{a \in A \mid N \cdot a = 0\}}{(t-1)\,A} \cong \frac{\{z \mid |z|^2 = 1\}}{\{\overline{z}/z \mid z \in \mathbb{C}^\times\}} = \frac{\mathbb{S}^1}{\mathbb{S}^1} = \{1\}$$

y

$$H^2(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \mathbb{C}^\times) \cong A^G/NA \cong \frac{\mathbb{R}^\times}{\{|z|^2 \mid z \in \mathbb{C}\}} = \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}_{>0} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Tenemos entonces los grupos de cohomología periódicos

n:	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$H^n(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \mathbb{C}^\times)$:	$\mathbb{R}^\times$	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	0	$\cdots$

De hecho, el grupo $H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \mathbb{C}^\times)$ debe ser trivial por el **teorema 90 de Hilbert**, y el grupo $H^2(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \mathbb{C}^\times) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ corresponde al **grupo de Brauer** $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. ▲

De hecho, las resoluciones de $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}[G]$-módulos libres que hemos encontrado para $G = \mathbb{Z}$ y C_m provienen de la topología algebraica—vean [K.S. Brown, Cohomology of Groups, §I.4, I.6].