Ejercicios de álgebra homológica

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

10 de septiembre de 2016

R-módulos

1) El R-módulo libre $R\langle X\rangle$ se caracteriza de modo único, salvo isomorfismo, por la propiedad universal

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & M \\ R\langle X\rangle \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

2) Calcule los grupos abelianos $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(A,B)$ para $A,B = \mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\ \mathbb{Q}$:

	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$
$\mathbb{Z}$	$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$	$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$	$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Z})$	$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$	$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Q})$
$\mathbb{Q}$	$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$	$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$	$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$

3) Calcule los grupos abelianos

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},$$
$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q},$$
$$\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}.$$

4) a) Demuestre que si $f\colon A \rightarrowtail B$ es un monomorfismo entre grupos abelianos, entonces el morfismo inducido $f\otimes\mathrm{id}\colon A\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\to B\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ es también mono. (En general, productos tensoriales no preservan monomorfismos, pero $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo plano; es una consecuencia del hecho de que toda localización $S^{-1}R$ es un R-módulo plano, pero puede encontrar una demostración directa.)

   b) Demuestre que T es un **grupo abeliano de torsión** (es decir, para cada elemento $x\in T$ existe $n\neq 0$ tal que $n\cdot x = 0$) si y solamente si $T\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} = 0$.

5) Considere la biyección

$$\mathrm{Hom}_R(L\otimes_R M, N) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_R(L, \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)),$$
$$\phi \mapsto \widehat{\phi},$$
$$\widetilde{\psi} \leftarrow\!\shortmid \psi$$

definida por

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}\colon L &\to \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N),\\ \ell &\mapsto (m \mapsto \phi(\ell\otimes m)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}\colon L\otimes_R M &\to N,\\ \ell\otimes m &\mapsto \psi(\ell)(m).\end{aligned}$$

Verifique que todo está bien definido y que la biyección es natural en el sentido de que cada morfismo de R-módulos $f\colon L\to L'$ induce un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(L\otimes_R M,N) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_R(L,\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)) \\
\mathrm{Hom}_R(L'\otimes_R M,N) \arrow[r, "\cong"'] \arrow[u, "-\circ(f\otimes \mathrm{id}_M)"] & \mathrm{Hom}_R(L',\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)) \arrow[u, "-\circ f"']
\end{tikzcd}$$

y cada morfismo de R-módulos $f\colon N\to N'$ induce un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(L\otimes_R M,N) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f\circ -"'] & \mathrm{Hom}_R(L,\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)) \arrow[d, "f_*\circ -"] \\
\mathrm{Hom}_R(L\otimes_R M,N') \arrow[r, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_R(L,\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N'))
\end{tikzcd}$$

Categorías

6) Cada isomorfismo es automáticamente mono y epi.

7) En la categoría R-**Mód** para una aplicación R-lineal $f\colon M\to N$ tenemos

   - f es mono si y solamente si f es inyectiva (como aplicación entre conjuntos),
   - f es epi si y solamente si f es sobreyectiva,
   - f es iso si y solamente si f es una biyección.

8) Si los productos y coproductos correspondientes existen, son conmutativos y asociativos salvo isomorfismos:

$$\begin{gathered} X\times Y\cong Y\times X,\\ X\sqcup Y\cong Y\sqcup X,\\ (X\times Y)\times Z\cong X\times(Y\times Z),\\ (X\sqcup Y)\sqcup Z\cong X\sqcup(Y\sqcup Z)\end{gathered}$$

   (use las propiedades universales).

9) Describa productos y coproductos en **Set**, **Top**, **Grp**, **Ab**, **Ring**, R-**Mód**.

10) Si f es un isomorfismo en $\mathbf{C}$ y F es un funtor $\mathbf{C}\to\mathbf{D}$, entonces $F(f)$ es un isomorfismo en $\mathbf{D}$.

El lema de Yoneda y funtores represebtables

11) En la clase dimos un bosquejo de la construcción de la biyección de Yoneda $\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,Y),F) \cong F(Y)$. Construya la biyección $\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-),F) \cong F(X)$ para el caso covariante. Provea todos los detalles necesarios, a saber que los morfismos $\alpha^x_Y\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y) \to F(Y)$ definidos a partir de un elemento $x \in F(X)$ dan una transformación natural, las correspondencias $x \mapsto \alpha^x$ y $\alpha \mapsto x \in F(X)$ dan una biyección y que es natural:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-),F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_*"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\ \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X',-),F) \arrow[r, "\cong"] & F(X') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-),F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\alpha\circ -"'] & F(X) \arrow[d, "\alpha_X"] \\ \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-),G) \arrow[r, "\cong"] & G(X) \end{tikzcd}$$

12) Cuando productos $\prod_i X_i$ y coproductos $\coprod_i X_i$ existen, tenemos isomorfismos de funtores

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,\prod_i X_i) \cong \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X_i), \quad \text{y} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\coprod_i X_i,-) \cong \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X_i,-).$$

Esto da otra definición de productos y coproductos en términos de funtores representables.

Funtores adjuntos

13) Describa con todos los detalles necesarios las siguientes adjunciones entre funtores (construya las biyecciones y demuestre que son naturales).

- El funtor del R-módulo libre $X \rightsquigarrow R\langle X\rangle$ es adjunto por la izquierda al funtor olvidadizo R-**Mód** $\to$ **Set**:
$$\mathrm{Hom}_R(R\langle X\rangle, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,M).$$
- Para cada conjunto fijo X el funtor $-\times X\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ es adjunto por la izquierda al funtor $(-)^X := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,-)\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$:
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Y\times X, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Y, Z^X).$$
- El funtor olvidadizo $Olv\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ es adjunto por la izquierda al funtor de la **topología indiscreta** **Set** $\to$ **Top** (que define sobre un conjunto X la topología donde los únicos subconjuntos abiertos son $\emptyset$ y X) y por la derecha al funtor de la **topología discreta** (donde cada subconjunto $U \subseteq X$ es abierto):
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Olv(X),Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Indiscr(Y)),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Discr(X),Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Olv(Y)).$$
- El funtor de abelianización de un grupo $G \rightsquigarrow G^{\mathrm{ab}} := G/[G,G]$ es adjunto por la izquierda al funtor de inclusión de la subcategoría plena $i\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$:
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(G^{\mathrm{ab}}, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, i(A)).$$
- El funtor que a partir de un grupo G construye el anillo $\mathbb{Z}[G]$ (donde los elementos son las sumas formales $\sum_{g\in G} n_g\, g$ y la multiplicación está definida por la multiplicación en G) es adjunto por la izquierda al funtor que asocia a un anillo R el grupo de los elementos invertibles $R^\times$:
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}[G], R) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, R^\times).$$

Note que estas adjunciones automáticamente implican los isomorfismos (de todas maneras obvios) como $R\langle X \sqcup Y\rangle \cong R\langle X\rangle \oplus R\langle Y\rangle$ y $(R_1 \times R_2)^\times \cong R_1^\times \times R_2^\times$, etc.

14) Para un funtor $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ existe un adjunto por la izquierda si y solamente si el funtor

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(-))\colon \mathbf{D} \to \mathbf{Set}$$

es representable.

15) Si $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ es adjunto por la derecha a dos funtores $F, F'\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, entonces $F \cong F'$.

16) Si $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ es adjunto por la derecha, entonces G preserva productos: $G(\prod_i Y_i) \cong \prod_i G(Y_i)$ (use el ejercicio 11)).

17) Escriba la demostración completa de que cada adjunción puede ser formulada en términos de su unidad y counidad. A saber, si tenemos una biyección natural

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y)),$$

en particular

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(X)) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, GF(X)), \\ \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(FG(Y), Y) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(G(Y), G(Y)). \end{aligned}$$

- Sea $\eta_X\colon X \to GF(X)$ el morfismo que corresponde al morfismo identidad $\mathrm{id}\colon F(X) \to F(X)$ por la primera biyección. Entonces los η_X definen una transformación natural $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}} \Rightarrow G \circ F$ (la **unidad de la adjunción**).
- Sea $\epsilon_Y\colon FG(Y) \to Y$ el morfismo que corresponde al morfismo identidad $\mathrm{id}\colon G(Y) \to G(Y)$ por la segunda biyección. Entonces los ϵ_Y definen una transformación natural $F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{D}}$ (la **counidad de la adjunción**).

La adjunción puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y)), \\ f &\mapsto G(f) \circ \eta_X, \\ \epsilon_Y \circ F(g) &\leftarrow\!\shortmid g. \end{aligned}$$

Objetos cero, núcleos y conúcleos

18) En una categoría con objeto cero, si m es un monomorfismo y $m \circ f = 0$, entonces $f = 0$; si e es un epimorphismo y $g \circ e = 0$, entonces $g = 0$.

19) En la categoría R-**Mód** para un morfismo R-lineal $f\colon M \to N$ el núcleo habitual $\ker f = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$ con el morfismo de inclusión $\ker f \to M$ satisface la propiedad universal de núcleos. El conúcleo habitual $\operatorname{coker} f := N/\operatorname{im} f$, donde $\operatorname{im} f := \{f(m) \mid m \in M\}$ con el morfismo de proyección $N \to N/\operatorname{im} f$ satisface la propiedad universal de conúcleos.

20) En una categoría con objeto cero, si $\operatorname{coker}(M \xrightarrow{f} N)$ existe, entonces el morfismo $N \to \operatorname{coker} f$ es epi y el objeto $\operatorname{coker} f$ es único salvo isomorfismo.

21) Demuestre que si $m\colon M \rightarrowtail N$ es un monomorfismo, entonces su núcleo es el morfismo cero $0 \to M$; si $e\colon M \twoheadrightarrow N$ es un epimorfismo, entonces su conúcleo es el morfismo cero $N \to 0$.

    Para el morfismo cero $0_{MN}\colon M \to N$ el morfismo $\ker(0_{MN}) \to M$ debe ser (salvo isomorfismo) el morfismo identidad $\mathrm{id}_M\colon M \to M$; el morfismo $N \to \operatorname{coker}(0_{MN})$ debe ser (salvo isomorfismo) el morfismo identidad $\mathrm{id}_N\colon N \to N$.

22) Sea $\mathbf{C}$ cualquier categoría y $f, g\colon X \to Y$ un par de morfismos. Un **ecualizador** $\mathrm{eq}(f,g)$ es un objeto junto con un morfismo $i\colon \mathrm{eq}(f,g) \to X$ tal que $f \circ i = g \circ i$ (de donde viene el nombre "ecualizador") y además i es universal entre todos los morfismos que ecualizan a f y g: a saber, si $j\colon Z \to X$ es otro morfismo tal que $f \circ j = g \circ j$, entonces existe un morfismo único $Z \to \mathrm{eq}(f,g)$ que hace parte del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{eq}(f,g) \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\
Z \arrow[u, dashed, "\exists!"] \arrow[ur, "j"'] & &
\end{tikzcd}$$

    Un **coecualizador** $\mathrm{coeq}(f,g)$ es un objeto junto con un morfismo $p\colon Y \to \mathrm{coeq}(f,g)$ tal que $p \circ f = p \circ g$ y que satisface la propiedad universal

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "q"'] & \mathrm{coeq}(f,g) \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

    Demuestre que si $\mathrm{eq}(f,g)$ (respectivamente $\mathrm{coeq}(f,g)$) existe, es único salvo isomorfismo. El morfismo $\mathrm{eq}(f,g) \to X$ (respectivamente $Y \to \mathrm{coeq}(f,g)$) es mono (respectivamente epi).

    Note que si $\mathbf{C}$ es una categoría con objeto cero, entonces $\ker f = \mathrm{eq}(f,0)$ y $\operatorname{coker} f = \mathrm{coeq}(f,0)$.

    Demustre que en **Set** para un par de aplicaciones $f, g\colon X \to Y$ el conjunto

$$\mathrm{eq}(f,g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

    con la inclusión $i\colon \mathrm{eq}(f,g) \hookrightarrow X$ satisface la propiedad universal del ecualizador. Luego sea $\sim$ la relación de equivalencia sobre Y generada por

$$f(x) \sim g(x) \text{ para cada } x \in X.$$

    Entonces el conjunto

$$\mathrm{coeq}(f,g) = Y/\sim$$

    con el morfismo de proyección $p\colon Y \twoheadrightarrow \mathrm{coeq}(f,g)$ satisface la propiedad universal del coecualizador.

Categorías aditivas

23) Sea $\mathbf{A}$ una categoría con estructura de grupos abelianos sobre cada conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M,N)$ que es compatible con la composición de morfismos, es decir,

$$(g+g') \circ f = g \circ f + g' \circ f \quad \text{y} \quad g \circ (f+f') = g \circ f + g \circ f'.$$

    Entonces para un objeto $0 \in \mathbf{A}$ las siguientes condiciones son equivalentes:

a) 0 es un **objeto inicial**, es decir para cualquier objeto $M \in \mathbf{A}$ existe un único morfismo $0 \to M$,

b) 0 es un **objeto terminal**, es decir para cualquier objeto $M \in \mathbf{A}$ existe un único morfismo $M \to 0$,

c) 0 es un **objeto cero**, es decir inicial y terminal al mismo tiempo,

d) el grupo abeliano $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(0,0)$ es trivial.

Note que en la categoría **Set** el conjunto vacío $\emptyset$ es un objeto inicial y un conjunto $\{*\}$ que consiste en un elemento es un objeto terminal. Así que **Set** no puede tener ninguna estructura de grupos abelianos sobre los conjuntos $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,Y)$.

24) Volvamos al ejercicio 21). Demuestre que en una categoría aditiva, $\operatorname{eq}(f,g)$ coincide con $\ker(f-g)$ y $\operatorname{coeq}(f,g)$ coincide con $\operatorname{coker}(f-g)$ (por esto no hemos definido ecualizadores y coecualizadores en la clase).

25) En una categoría aditiva, para cuatro morfismos

$$\begin{aligned} f_{11}&\colon M_1 \to N_1,\\ f_{12}&\colon M_2 \to N_1,\\ f_{21}&\colon M_1 \to N_2,\\ f_{22}&\colon M_2 \to N_2 \end{aligned}$$

sea

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \colon M_1 \oplus M_2 \to N_1 \oplus N_2$$

el morfismo definido de modo único por las identidades

$$\begin{aligned} f_{11} &= p_1 \circ \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \circ i_1,\\ f_{12} &= p_1 \circ \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \circ i_2,\\ f_{21} &= p_2 \circ \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \circ i_1,\\ f_{22} &= p_2 \circ \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \circ i_2, \end{aligned}$$

Donde $i_1\colon M_1 \to M_1 \oplus M_2$, $i_2\colon M_2 \to M_1 \oplus M_2$, $p_1\colon N_1 \oplus N_2 \to N_1$, $p_2\colon N_1 \oplus N_2 \to N_2$ son los morfismos canónicos que acompañan a los (bi)productos $M_1 \oplus M_2$ y $N_1 \oplus N_2$. Verifique que la composición de tales morfismos corresponde a la multiplicación de matrices:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}}_{Y} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} \circ f_{11} + g_{12} \circ f_{21} & g_{11} \circ f_{12} + g_{12} \circ f_{22} \\ g_{21} \circ f_{11} + g_{22} \circ f_{21} & g_{21} \circ f_{12} + g_{22} \circ f_{22} \end{pmatrix}}_{Y \cdot X}.$$

Además, para la composición de estas "matrices" con los morfismos

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} := i_1 \circ g_1 + i_2 \circ g_2 \colon L \to M_1 \oplus M_2$$
$$(h_1, h_2) := h_1 \circ p_1 + h_2 \circ p_2 \colon N_1 \oplus N_2 \to L$$

tenemos

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} \circ g_1 + f_{12} \circ g_2 \\ f_{21} \circ g_1 + f_{22} \circ g_2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \circ f_{11} + h_2 \circ f_{21} & h_1 \circ f_{12} + h_2 \circ f_{22} \end{pmatrix}.$$

(Indicación: puede ser útil la identidad $\mathrm{id} = i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2$.)

26) Verifique *directamente* que los funtores $- \otimes_R N$, $M \otimes_R -$, $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, -)$, $\underline{\mathrm{Hom}}_R(-, N)$ son aditivos (hemos visto en la clase que son aditivos porque hay adjunciones entre ellos).

Categorías abelianas

27) Una categoría $\mathbf{A}$ es abeliana si y solamente si su categoría opuesta $\mathbf{A}^\circ$ es abeliana.

Funtores exactos

28) Sea $F \colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor aditivo entre categorías abelianas. Tomamos como definición de exactitud la siguiente:

a) F es **exacto por la izquierda** si para cada sucesión exacta corta en $\mathbf{A}$

(*) $$0 \to L \to M \to N \to 0$$

la sucesión correspondiente $0 \to F(L) \to F(M) \to F(N)$ es también exacta.

b) F es **exacto por la derecha** si para cada sucesión exacta corta (*) en $\mathbf{A}$ la sucesión correspondiente $F(L) \to F(M) \to F(N) \to 0$ es también exacta.

Demuestre que estas condiciones son equivalentes a

a′) F es exacto por la izquierda si para cada sucesión exacta en $\mathbf{A}$

$$0 \to L \to M \to N$$

la sucesión correspondiente $0 \to F(L) \to F(M) \to F(N)$ es también exacta.

a″) F es exacto por la izquierda si F preserva núcleos: $\ker(F(M) \xrightarrow{f_*} F(N)) = F(\ker(M \xrightarrow{f} N))$.

b′) F es exacto por la derecha si para cada sucesión exacta en $\mathbf{A}$

$$L \to M \to N \to 0$$

la sucesión correspondiente $F(L) \to F(M) \to F(N) \to 0$ es también exacta.

b$''$) F es exacto por la derecha si F preserva conúcleos: $\operatorname{coker}(F(L) \xrightarrow{f_*} F(M)) = F(\operatorname{coker}(L \xrightarrow{f} M))$.

29) Demuestre que para cualquier categoría abeliana $\mathbf{A}$ los funtores

$$\begin{gathered} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M, -)\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Ab}, \\ \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(-, N)\colon \mathbf{A}^\circ \to \mathbf{Ab} \end{gathered}$$

son exactos por la izquierda.

30) Demuestre directamente que $- \otimes_R M$ es exacto por la derecha (sin usar nuestro argumento con la adjunción entre $- \otimes_R M$ y $\underline{\operatorname{Hom}}_R(M, -)$).

δ-funtores

31) Sea $(E^\bullet, \delta^\bullet)$ un **δ-funtor derecho borrable**; es decir, supongamos que para cada $n > 0$ y $M \in \mathbf{A}$ existe un monomorfismo $M \rightarrowtail N$ tal que $E^n(N) = 0$. Demuestre el teorema de Grothendieck: $(E^\bullet, \delta^\bullet)$ *es universal en el sentido de que para cualquier δ-funtor derecho $(T^\bullet, \partial^\bullet)$ una transformación natural $E^0 \Rightarrow T^0$ se extiende a transformaciones naturales $E^n \Rightarrow T^n$ que conmutan con los morfismos de conexión δ^n y ∂^n.* (Véanse los apuntes para la demostración del caso de los δ-funtores izquierdos borrables.)

Lema de la serpiente y morfismos de conexión

32) Verifique que la sucesión exacta del lema de la serpiente es natural: si tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & M_1' \arrow[r] \arrow[d, "d_1'"'] \arrow[ddr] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "d"'] \arrow[ddr] & M_1'' \arrow[r] \arrow[d, "d_1''"'] \arrow[ddr] & 0 & \\
0 \arrow[r] & N_1' \arrow[r] \arrow[ddr] & N_1 \arrow[r] \arrow[ddr] & N_1'' \arrow[r, dashed] \arrow[ddr] & 0 & \\
& 0 \arrow[r, dashed] & M_2' \arrow[r] \arrow[d, "d_2'"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "d_2"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d_2''"] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & N_2' \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_2'' \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}$$

con filas exactas, entonces las sucesiones exactas correspondientes con ker y coker forman un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & \ker d_1' \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_1 \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_1'' \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d] & \operatorname{coker} d_1' \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker} d_1 \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker} d_1'' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r, dashed] & \ker d_2' \arrow[r] & \ker d_2 \arrow[r] & \ker d_2'' \arrow[r, "\delta_2"] & \operatorname{coker} d_2' \arrow[r] & \operatorname{coker} d_2 \arrow[r] & \operatorname{coker} d_2'' \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}$$

33) En el caso de los R-módulos, donde $H^n \cong \ker d^n / \operatorname{im} d^{n-1}$, describa la sucesión exacta de cohomología

$$\cdots \to H^n(K^\bullet) \to H^n(M^\bullet) \to H^n(N^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(K^\bullet) \to \cdots$$

en términos de elementos.

34) Analice la construcción de los morfismos de conexión y verifique que en el caso de la sucesión exacta corta del cono de $f^\bullet\colon M^\bullet \to N^\bullet$

$$0 \to N^\bullet \rightarrowtail C(f) \twoheadrightarrow M^\bullet[1] \to 0$$

los morfismos de conexión

$$\delta^n\colon H^n(M^\bullet[1]) = H^{n+1}(M^\bullet) \to H^{n+1}(N^\bullet)$$

son simplemente los morfismos inducidos por $f^\bullet$.

En particular, $f^\bullet$ es un cuasi-isomorfismo si y solamente si el complejo $C(f)$ es exacto (tiene cohomología trivial).

Objetos proyectivos e inyectivos

35) Demuestre que en toda sucesión exacta

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

si los objetos M' y M'' son proyectivos (resp. inyectivos), entonces M es proyectivo (resp. inyectivo).

36) Demuestre que $\mathbb{Q} \cong A \oplus B$ (suma directa de grupos abelianos) implica $A = 0$ o $B = 0$.

37) Sea F el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por los números enteros positivos [1], [2], [3], ... Consideremos el morfismo

$$\begin{aligned} p\colon F &\twoheadrightarrow \mathbb{Q}, \\ [n] &\mapsto \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Es epi, pero tiene núcleo muy grande, porque $\mathbb{Q}$ tiene muchas relaciones entre sus elementos. Si $\mathbb{Q}$ fuera proyectivo, existiría una sección, es decir un morfismo $s\colon \mathbb{Q} \to F$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_\mathbb{Q}$:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Q} \arrow[dl, dashed, "s"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, phantom, "?", shift left=2] \\ F \arrow[r, two heads, "p"'] & \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

Demuestre que esto es imposible porque no existe ningún morfismo no trivial $s\colon \mathbb{Q} \to F$.

38) Supongamos que $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es adjunto por la izquierda a $G\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$.

a) Si F es exacto, entonces G **preserva objetos inyectivos** (si $I \in \mathbf{B}$ es inyectivo, entonces $G(I) \in \mathbf{A}$ es inyectivo).

b) Si G es exacto, entonces F **preserva objetos proyectivos** (si $P \in \mathbf{A}$ es proyectivo, entonces $F(P) \in \mathbf{B}$ es proyectivo).

Resoluciones proyectivas e inyectivas

39) Supongamos que en **A hay suficientes proyectivos**: para cada $M \in \mathbf{A}$ existe un epimorfismo $P \twoheadrightarrow M$ desde algún objeto proyectivo P. Demuestre con todos los detalles necesarios que para cada $M \in \mathbf{A}$ existe una **resolución proyectiva**, es decir, una sucesión exacta

$$\cdots \to P^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

donde P^n son objetos proyectivos.

40) Supongamos que en **A hay suficientes inyectivos**: para cada $M \in \mathbf{A}$ existe un monomorfismo $M \rightarrowtail I$ hacia algún objeto inyectivo I. Demuestre con todos los detalles necesarios que para cada $M \in \mathbf{A}$ existe una **resolución inyectiva**, es decir, una sucesión exacta

$$0 \to M \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \cdots$$

donde I^n son objetos inyectivos.

41) Sea P un objeto proyectivo. Recuerde que esto es equivalente a la siguiente propiedad de extensión:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \\ M \arrow[r, two heads] & N \end{tikzcd}$$

a) Deduzca la siguiente propiedad: si P es proyectivo y tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] \arrow[dr, "=0"] & \\ M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \end{tikzcd}$$

donde la fila $M' \to M \to M''$ es exacta y la composición $P \to M \to M''$ es el morfismo cero, entonces existe un morfismo $P \to M'$ tal que el diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \arrow[dr, "=0"] & \\ M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \end{tikzcd}$$

b) Sea P un objeto proyectivo. Supongamos que en el diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "d"] & Q \arrow[d, "f"] & \\ M' \arrow[r, "d^1"] & M \arrow[r, "d^2"] & M'' \end{tikzcd}$$

la fila $M' \to M \to M''$ es exacta y además $d^2 \circ f \circ d = 0$. Entonces existe un morfismo $f' \colon P \to M'$ tal que $f \circ d = d^1 \circ f'$:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "d"] \arrow[d, dashed, "f'"'] & Q \arrow[d, "f"] & \\ M' \arrow[r, "d^1"] & M \arrow[r, "d^2"] & M'' \end{tikzcd}$$

c) Sea P un objeto proyectivo. Supongamos que en el siguiente diagrama (¡no necesariamente conmutativo!) tenemos $d^2 \circ h \circ d = d^2 \circ s$ y la fila $M' \to M \to M''$ es exacta:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[r, "d"] \arrow[d, "s"'] & Q \arrow[dl, "h"] \\ M' \arrow[r, "d^1"'] & M \arrow[r, "d^2"'] & M'' \end{tikzcd}$$

Entonces existe un morfismo $h' \colon P \to M'$ tal que

$$d^1 \circ h' + h \circ d = s.$$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[r, "d"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dl, dashed, "h'"'] & Q \arrow[dl, "h"] \\ M' \arrow[r, "d^1"'] & M \arrow[r, "d^2"'] & M'' \end{tikzcd}$$

42) Usando el ejercicio 40), demuestre con todos los detalles necesarios que si $P^\bullet \to M$ y $Q^\bullet \to M$ son dos resoluciones proyectivas de M, entonces los complejos $P^\bullet$ y $Q^\bullet$ son homotópicos (existen morfismos de complejos $f^\bullet \colon P^\bullet \to Q^\bullet$ y $g^\bullet \colon Q^\bullet \to P^\bullet$ tales que $g^\bullet \circ f^\bullet \simeq \mathrm{id}_{P^\bullet}$ y $f^\bullet \circ g^\bullet \simeq \mathrm{id}_{Q^\bullet}$).

43) Demuestre con todos los detalles necesarios que si $M \to I^\bullet$ y $M \to J^\bullet$ son dos resoluciones inyectivas de M, entonces los complejos $I^\bullet$ y $J^\bullet$ son homotópicos. Para esto puede ser útil un análogo del ejercicio 40) para objetos inyectivos.

44) Consideremos el funtor

$$\begin{aligned} \widehat{\cdot} \colon R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ &\to R\text{-}\mathbf{Mód}, \\ M &\rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Demuestre que $\widehat{\cdot}$ es exacto y adjunto a sí mismo (ya que puede ser visto como un funtor R-**Mód**$^\circ \to$ R-**Mód** o R-**Mód** $\to$ R-**Mód**$^\circ$) y el morfismo de evaluación

$$\begin{aligned} \eta_M \colon M &\to \widehat{\widehat{M}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \\ x &\mapsto (f \mapsto (f(x))) \end{aligned}$$

es la unidad de la adjunción.

Gracias al ejercicio 38), esto implica que si P es un módulo proyectivo, entonces $\widehat{P}$ es un módulo inyectivo.

45) Hemos demostrado en la clase que los funtores derivados por la izquierda de un funtor exacto por la derecha se calculan por la fórmula $L_n F(M) = H^{-n}(F(P^\bullet))$ donde $P^\bullet \twoheadrightarrow M$ es una resolución proyectiva. Demuestre que si F es exacto por la derecha, entonces sus funtores derivados por la izquierda vienen dados por

$$R^n F(M) = H^n(F(I^\bullet)),$$

donde $M \rightarrowtail I^\bullet$ es una resolución inyectiva (dualice nuestra demostración).

Ext y Tor

46) Sean I y J ideales en un anillo conmutativo R. Demuestre que

$$\begin{aligned}\operatorname{Tor}_1^R(R/I, R/J) &\cong \frac{I \cap J}{IJ},\\ \operatorname{Tor}_2^R(R/I, R/J) &\cong \ker(I \otimes_R J \xrightarrow{x\otimes y \mapsto xy} IJ).\end{aligned}$$

Indicación: aplique el lema de la serpiente al diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & IJ \arrow[r] \arrow[d, tail] & I \arrow[r] \arrow[d, tail] & I \otimes_R R/J \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & J \arrow[r] & R \arrow[r] & R \otimes_R R/J \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

47) Calcule $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z})$ para a) un grupo abeliano finitamente generado y b) un grupo abeliano de torsión (indicación: examine la sucesión exacta corta $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$).

48) Calcule los grupos abelianos $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, B)$ para $A, B = \mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\ \mathbb{Q}$:

	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$
$\mathbb{Z}$	$\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$	$\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$	$\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Z})$	$\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$	$\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Q})$
$\mathbb{Q}$	$\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$	$\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$	$\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$

49) Calcule los grupos abelianos $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$ para $A, B = \mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\ \mathbb{Q}$:

	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$
$\mathbb{Z}$	$\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$	$\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$	$\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Z})$	$\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$	$\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Q})$
$\mathbb{Q}$	$\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$	$\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$	$\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$

50) En topología algebraica se estudia que la homología $H_n(\mathbb{RP}^n)$ del espacio proyectivo real $\mathbb{RP}^n$ es la homología del complejo

$$C_\bullet\colon \quad \cdots \to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$

que consiste en grupos $\mathbb{Z}$ en grados $0, \ldots, n$ y como diferenciales 0 o $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}$, dependiendo de la paridad. Calcule estos grupos de homología y luego los grupos de cohomología $H^n(X; A) := H^n(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_\bullet, A))$ usando el teorema de coeficientes universales (vea los detalles en mis apuntes).