Álgebra homológica, día 10

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

19 de agosto de 2016

1. Resoluciones proyectivas

1.1. Definición. Sea $\mathbf{A}$ una categoría abeliana. Se dice que en $\mathbf{A}$ hay **suficientes objetos proyectivos** si para cada $M \in \mathbf{A}$ existe un epimorfismo $P \twoheadrightarrow M$ desde algún objeto proyectivo P.

Esto significa que cada objeto de la categoría es un cociente de un objeto proyectivo: $M \cong P/K$ donde K es el núcleo de un epimorfismo $P \twoheadrightarrow M$. En particular, en la categoría R-**Mód** hay suficientes objetos proyectivos:

1.2. Observación. *Para cada R-módulo M existe un epimorfismo $P \twoheadrightarrow M$ desde algún R-módulo proyectivo.*

Demostración. Para cada módulo M sea X un conjunto de sus generadores. Podemos considerar el módulo libre $R\langle X\rangle$ y el epimorfismo correspondiente $R\langle X\rangle \twoheadrightarrow M$ (que simplemente aplica $x \in X$ a x). No importa si M no es finitamente generado, por ejemplo siempre se puede tomar $X = M$. Cada modulo libre es proyectivo. ■

1.3. Definición. Sea $M \in \mathbf{A}$ un objeto. Entonces su **resolución proyectiva** es un complejo $P^\bullet$ formado por objetos proyectivos, con cuasi-isomorfismo de complejos $\epsilon\colon P^\bullet \to M$, donde M es el complejo correspondiente concentrado en el grado 0:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{-2} \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r] & P^0 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon", "\text{cuasi-iso}"'] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Se ve que es la misma cosa que una sucesión exacta

$$\cdots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

donde cada P^n es proyectivo. La numeración $P^0, P^{-1}, P^{-2}, \ldots$ es un poco rara y sirve solo para que el complejo $P^\bullet$ sea co-homológico (con diferenciales que incrementan el grado).

1.4. Ejemplo. Cada grupo abeliano A puede ser representado como F/R donde F es un grupo abeliano libre y R es su subgrupo de relaciones (que es también libre, como subgrupo de un grupo libre). Por lo tanto, los $\mathbb{Z}$-módulos tienen resoluciones proyectivas muy sencillas de la forma

$$0 \to R \to F \to A \to 0$$

Por ejemplo, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ no es proyectivo, pero tiene una resolución proyectiva

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

▲

La cohomología $H^n(P^\bullet)$ es, por la definición, poco interesante:

$$H^n(P^\bullet) \cong \begin{cases} M, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Sin embargo, en un rato las resoluciones nos van a servir para calcular funtores derivados. Antes de todo, tenemos que ver que resoluciones proyectivas siempre existen y, en cierto sentido, son únicas.

1.5. Observación. *Si* $\mathbf{A}$ *es una categoría abeliana con suficientes objetos proyectivos (por ejemplo, la categoría de* R*-módulos), entonces para cada objeto* $M \in \mathbf{A}$ *existe una resolución proyectiva.*

Demostración. Vamos a construir paso a paso una sucesión exacta

$$\cdots \to P^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

Primero, escojamos un epimorfismo $\epsilon\colon P^0 \twoheadrightarrow M$ desde un objeto proyectivo P^0. Este epimorfismo tiene algún núcleo $\iota^0\colon \ker\epsilon \rightarrowtail P^0$. Luego, existe un epimorfismo $\epsilon^{-1}\colon P^{-1} \twoheadrightarrow \ker\epsilon$, donde P^{-1} es otro módulo libre. Este epimorfismo también tiene algún núcleo, etcétera. Así inductivamente construimos un diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & \ker\epsilon^{-2} \arrow[dr, tail, "\iota^{-2}"] & & & & \ker\epsilon \arrow[dr, tail, "\iota^0"] & & \\
\cdots & P^{-3} \arrow[ur, two heads, "\epsilon^{-3}"] \arrow[rr, dashed, "d^{-3}"] & & P^{-2} \arrow[rr, dashed, "d^{-2}"] \arrow[dr, two heads, "\epsilon^{-2}"'] & & P^{-1} \arrow[rr, dashed, "d^{-1}"] \arrow[ur, two heads, "\epsilon^{-1}"] & & P^0 \arrow[r, two heads, "\epsilon"] & M \\
 & & & & \ker\epsilon^{-1} \arrow[ur, tail, "\iota^{-1}"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

Definamos $d^n := \iota^{n+1} \circ \epsilon^n$. Se ve que todo esto da una resolución de M. ∎

1.6. Ejercicio. *Termine la demostración: verifique que la sucesión es exacta ("$\operatorname{im} d^{n-1} = \ker d^n$" para cada n; es una caza de diagramas sencilla).*

1.7. Ejercicio. *Sea* P *un objeto proyectivo. Recuerde que esto es equivalente a la siguiente propiedad de extensión:*

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \\
M \arrow[r, two heads] & N
\end{tikzcd}$$

0) Deduzca la siguiente propiedad: si P *es proyectivo y tenemos un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d] \arrow[dr, "=0"] & \\
M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M''
\end{tikzcd}$$

donde la fila $M' \to M \to M''$ *es exacta y la composición* $P \to M \to M''$ *es el morfismo cero, entonces existe un morfismo* $P \to M'$ *tal que el diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \arrow[dr, "=0"] & \\
M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M''
\end{tikzcd}$$

1) Sea P un objeto proyectivo. Supongamos que en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "d"] & Q \arrow[d, "f"] & \\
M' \arrow[r, "d^1"] & M \arrow[r, "d^2"] & M''
\end{tikzcd}$$

la fila $M' \to M \to M''$ es exacta y además $d^2 \circ f \circ d = 0$. Entonces existe un morfismo $f' \colon P \to M'$ tal que $f \circ d = d^1 \circ f'$:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "d"] \arrow[d, dashed, "f'"'] & Q \arrow[d, "f"] & \\
M' \arrow[r, "d^1"] & M \arrow[r, "d^2"] & M''
\end{tikzcd}$$

2) Sea P un objeto proyectivo. Supongamos que en el siguiente diagrama (¡no necesariamente conmutativo!) tenemos $d^2 \circ h \circ d = d^2 \circ s$ y la fila $M' \to M \to M''$ es exacta:

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[r, "d"] \arrow[d, "s"'] & Q \arrow[dl, "h"] \\
M' \arrow[r, "d^1"'] & M \arrow[r, "d^2"'] & M''
\end{tikzcd}$$

Entonces existe un morfismo $h' \colon P \to M'$ tal que

$$d^1 \circ h' + h \circ d = s.$$

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[r, "d"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dl, dashed, "h'"'] & Q \arrow[dl, "h"] \\
M' \arrow[r, "d^1"'] & M \arrow[r, "d^2"'] & M''
\end{tikzcd}$$

1.8. Proposición. *Sea $P^\bullet \twoheadrightarrow M$ una resolución proyectiva de M y $Q^\bullet \twoheadrightarrow N$ otro complejo exacto (en particular, $Q^\bullet \twoheadrightarrow N$ puede ser una resolución proyectiva de N). Entonces cada morfismo $f \colon M \to N$ induce un morfismo de complejos $f^\bullet \colon P^\bullet \to Q^\bullet$ tal que $f_0^* \colon H^0(P^\bullet) \to H^0(Q^\bullet)$ coincide con $f \colon M \to N$. Además, $f^\bullet$ es único salvo homotopía.*

Demostración. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo donde las filas son exactas:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{-2} \arrow[r, "d^{-2}"] & P^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] & P^0 \arrow[r, two heads, "\epsilon"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q^{-2} \arrow[r, "\partial^{-2}"'] & Q^{-1} \arrow[r, "\partial^{-1}"'] & Q^0 \arrow[r, two heads, "\epsilon'"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

El punto 1) del ejercicio 1.7 nos permite construir inductivamente morfismos $f^n \colon P^n \to Q^n$ que dan el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{-2} \arrow[r, "d^{-2}"] \arrow[d, dashed, "f^{-2}"] & P^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, dashed, "f^{-1}"] & P^0 \arrow[r, two heads, "\epsilon"] \arrow[d, dashed, "f^0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q^{-2} \arrow[r, "\partial^{-2}"'] & Q^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"'] & Q^0 \arrow[r, two heads, "\epsilon'"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Este $f^\bullet$ no es necesariamente único, pero si existe otro morfismo de complejos $g^\bullet \colon P^\bullet \to Q^\bullet$, entonces podemos aplicar el punto 2) del ejercicio 1.7 a los morfismos $s^n := f^n - g^n$ para obtener h^n tales que

$$s^n = h^{n+1} \circ d^n + \partial^{n-1} \circ h^n.$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{-2} \arrow[r, "d^{-2}"] \arrow[d, shift right, "f^{-2}"'] \arrow[d, shift left, "g^{-2}"] & P^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, shift right, "f^{-1}"'] \arrow[d, shift left, "g^{-1}"] \arrow[dl, dashed, "h^{-1}"] & P^0 \arrow[r, two heads, "\epsilon"] \arrow[d, shift right, "f_0"'] \arrow[d, shift left, "g^0"] \arrow[dl, dashed, "h^0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"] \arrow[dl, dashed] & 0 \arrow[dl, dashed] \\
\cdots \arrow[r] & Q^{-2} \arrow[r, "\partial^{-2}"'] & Q^{-1} \arrow[r, "\partial^{-1}"'] & Q^0 \arrow[r, two heads, "\epsilon'"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

■

1.9. Ejercicio. *Provea los detalles necesarios.*

1.10. Corolario. *La resolución proyectiva $P^\bullet \twoheadrightarrow M$ está definida de modo único salvo homotopía de complejos.*

Demostración. Sean $P^\bullet \twoheadrightarrow M$ y $Q^\bullet \twoheadrightarrow M$ dos resoluciones proyectivas de M. Entonces existen morfismos de complejos $f^\bullet \colon P^\bullet \to Q^\bullet$ y $g^\bullet \colon Q^\bullet \to P^\bullet$ que inducen en H^0 el morfismo $\mathrm{id}_M \colon M \to M$. Luego, las composiciones $g^\bullet \circ f^\bullet$ y $f^\bullet \circ g^\bullet$ deben ser equivalentes por una homotopía de cadenas a los morfismos identidades $P^\bullet \to P^\bullet$ y $Q^\bullet \to Q^\bullet$. ■

2. Resoluciones inyectivas

2.1. Definición. Sea **A** una categoría abeliana. Se dice que en **A** hay **suficientes objetos inyectivos** si para cada $M \in \mathbf{A}$ existe un monomorfismo $M \rightarrowtail I$ hacia algún objeto inyectivo I.

Esto significa que cada objeto de la categoría es un sub-objeto de un objeto inyectivo: $M \subset I$.

2.2. Hecho. *Hay suficientes R-módulos inyectivos; es decir, para cada R-módulo M existe un R-módulo inyectivo I tal que M es un submódulo de I.*

Este resultado es un poco más técnico que la existencia de suficientes proyectivos en R-**Mód**, así que vamos a postponer su demostración a la siguiente sección.

2.3. Definición. Para un objeto $M \in \mathbf{A}$ su **resolución inyectiva** es un complejo $I^\bullet$ formado por objetos inyectivos, con cuasi-isomorfismo de complejos $\iota\colon M \to I^\bullet$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "\iota"', "\text{cuasi-iso}"] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Se ve que esto corresponde a una sucesión exacta

$$0 \to M \xrightarrow{\iota} I^0 \to I^1 \to I^2 \to \cdots$$

donde I^n son inyectivos.

2.4. Ejemplo. $\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo, pero tiene una resolución inyectiva

$$0 \to \mathbb{Z} \rightarrowtail \mathbb{Q} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

Los grupos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son divisibles y por lo tanto inyectivos. ▲

2.5. Observación. *Si* **A** *es una categoría abeliana con suficientes objetos inyectivos (por ejemplo, la categoría de R-módulos), entonces para cada objeto M existe una resolución inyectiva.*

Demostración. Podemos usar la construcción similar a la de 1.5:

$$\begin{tikzcd}
& & \operatorname{coker}\iota \arrow[dr, tail, "\iota^1"] & & & & \operatorname{coker}\iota^2 \arrow[dr, tail, "\iota^3"] & & \\
M \arrow[r, tail, "\iota"] & I^0 \arrow[ur, two heads, "\epsilon^0"] \arrow[rr, dashed, "d^0"] & & I^1 \arrow[dr, two heads, "\epsilon^1"'] \arrow[rr, dashed, "d^1"] & & I^2 \arrow[ur, two heads, "\epsilon^2"] \arrow[rr, dashed, "d^2"] & & I^3 & \cdots \\
& & & & \operatorname{coker}\iota^1 \arrow[ur, tail, "\iota^2"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

■

2.6. Ejercicio. *Provea los detalles a la demostración de arriba. Verifique que la sucesión obtenida es exacta ("*$\operatorname{im} d^n = \ker d^{n+1}$*" para cada n).*

Como en el caso de las resoluciones proyectivas, las resoluciones inyectivas son únicas salvo homotopía:

2.7. Proposición. *Sean $M \rightarrowtail I^\bullet$ y $N \rightarrowtail J^\bullet$ algunas resoluciones inyectivas. Entonces cada morfismo de complejos $f\colon M \to N$ induce un morfismo $f^\bullet\colon I^\bullet \to J^\bullet$ tal que $f^0_*\colon H^0(I^\bullet) \to H^0(J^*)$ coincide con $f\colon M \to N$. Este $f^\bullet$ es único salvo homotopía.*

En particular, resolución inyectiva $M \rightarrowtail I^\bullet$ está definida de modo único salvo homotopía de complejos.

3. Suficientes R-módulos inyectivos

Como hemos visto, hay suficientes R-módulos proyectivos: para cada R-módulo M existe un R-módulo proyectivo P junto con un epimorfismo $P \twoheadrightarrow M$. La demostración era muy fácil porque se podía considerar el R-módulo libre apropiado $R\langle X\rangle$. La situación con módulos inyectivos es más sutil: no es tan obvio cómo a partir de un R-módulo M se puede construir un R-módulo inyectivo I tal que $M \subset I$ es su submódulo. Hay dos métodos diferentes para demostrar que hay suficientes inyectivos: uno es construirlos directamente y otro es demostrar que la categoría R-**Mód** satisface ciertos axiomas adicionales que se tratan de productos infinitos (les recuerdo que los axiomas básicas de categorías abelianas se tratan solo de productos finitos $M \oplus N$) y usar un teorema general del artículo de Tohoku de Grothendieck. El último método fue descubierto para demostrar que la categoría de haces de R-módulos tiene suficientes objetos inyectivos (y en general no tiene suficientes objetos proyectivos). Para nuestros objetivos va a ser suficiente el método explícito porque no nos interesan otras categorías abelianas, sino solamente la de R-módulos.

3.1. Definición. Si M es un R-módulo, sea

$$\widehat{M} := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

el grupo de homomorfismos de grupos abelianos $f\colon M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ con acción de R definida por* $(r \cdot f)(x) := f(r \cdot x)$.

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un grupo abeliano inyectivo, lo que significa que el funtor contravariante $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es exacto (visto como un funtor con valores en **Ab** o en R-**Mód**, gracias a la estructura de R-módulo sobre $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ definida arriba). Entonces tenemos la siguiente

3.2. Observación. *Tenemos un funtor exacto contravariante*

$$\widehat{\cdot}\colon R\text{-}\mathbf{M\acute{o}d}^{\circ} \to R\text{-}\mathbf{M\acute{o}d}.$$

Notamos que tenemos un isomorfismo natural en M

$$\widehat{M} = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \underline{\operatorname{Hom}}_R(M, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})),$$

(es decir, isomorfismo de funtores $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \underline{\operatorname{Hom}}_R(-, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$), lo que significa que $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un R-módulo inyectivo.

3.3. Observación. *Si $M \neq 0$, entonces $\widehat{M} \neq 0$. Es decir, si $M \neq 0$, entonces existe un morfismo de grupos abelianos no trivial $M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.*

Demostración. Si $M \neq 0$, entonces M contiene un subgrupo abeliano cíclico no trivial $M' \subset M$, donde $M' \cong \mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Luego, como el grupo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es inyectivo, el monomorfismo $M' \rightarrowtail M$ induce un epimorfismo $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M', \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Entonces es suficiente encontrar algún homomorfismo no trivial $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. En el primer caso, tenemos $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, y entonces hay un montón de homomorfismos no triviales; en el segundo caso $1 \mapsto [1/n]$ define correctamente un homomorfismo no trivial. ■

El funtor $\widehat{\cdot}\colon R\text{-}\mathbf{M\acute{o}d}^{\circ} \to R\text{-}\mathbf{M\acute{o}d}$ es exacto y contravariante, de donde el funtor $\widehat{\widehat{\cdot}}$ es exacto covariante $R\text{-}\mathbf{M\acute{o}d} \to R\text{-}\mathbf{M\acute{o}d}$. Para cada M consideremos el morfismo de evaluación

*Como siempre, si R no es conmutativo, la acción correcta es por la derecha: para un R-módulo izquierdo M el R-módulo $\widehat{M}$ es naturalmente derecho.

$$\begin{aligned} \eta_M \colon M &\to \widehat{\widehat{M}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \\ x &\mapsto (f \mapsto f(x)). \end{aligned}$$

Se ve que estos morfismos son naturales: cada morfismo de R-módulos $f \colon M \to N$ induce un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[d, "f"'] & \widehat{\widehat{M}} \arrow[d, "\widehat{\widehat{f}}"] \\ N \arrow[r, "\eta_N"'] & \widehat{\widehat{N}} \end{tikzcd}$$

3.4. Observación. *Para cada R-módulo M el morfismo natural $\eta_M \colon M \to \widehat{\widehat{M}}$ es mono.*

Demostración. Sea $i \colon K \rightarrowtail M$ el núcleo de η_M. Tenemos que ver que $K = 0$. Gracias a 3.3, es suficiente demostrar que $\widehat{K} = 0$. El funtor $\widehat{\cdot}$ es exacto, y entonces induce un monomorfismo $\widehat{\widehat{i}} \colon \widehat{\widehat{K}} \to \widehat{\widehat{M}}$. Tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\eta_K"] \arrow[d, tail, "i"'] & \widehat{\widehat{K}} \arrow[d, tail, "\widehat{\widehat{i}}"] \\ M \arrow[r, "\eta_M"'] & \widehat{\widehat{M}} \end{tikzcd}$$

Tenemos $\widehat{\widehat{i}} \circ \eta_K = \eta_M \circ i = 0$ y $\widehat{\widehat{i}}$ es mono, y entonces $\eta_K = 0$. Pero esto implica que $\widehat{K} = 0$. De hecho, si $\widehat{K} \neq 0$, de donde existe un morfismo $f \colon K \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $f(x) \neq 0$ para algún $x \in K$. Pero en este caso $\eta_K(x)(f) \neq 0$ que contradice el hecho que $\eta_K = 0$. ∎

Ahora estamos listos para demostrar que en la categoría de R-módulos hay suficientes objetos inyectivos:

3.5. Proposición. *Para cualquier R-módulo M existe un monomorfismo $M \rightarrowtail I$ donde I es un R-módulo inyectivo.*

Demostración. Consideremos el R-módulo $\widehat{M}$. Existe un epimorfismo $R\langle X \rangle \twoheadrightarrow \widehat{M}$ desde algún R-módulo libre con generadores X. El funtor $\widehat{\cdot}$ es contravariante exacto, entonces tememos un monomorfismo

$$\widehat{\widehat{M}} \rightarrowtail \widehat{R\langle X \rangle}$$

Además, como hemos visto, $M \rightarrowtail \widehat{\widehat{M}}$, entonces nos falta solo demostrar que $\widehat{R\langle X \rangle}$ es inyectivo. Pero

$$\widehat{R\langle X \rangle} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R\langle X \rangle, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \underline{\mathrm{Hom}_R}(R\langle X \rangle, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \cong \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

es un producto de R-módulos inyectivos. ∎

3.6. Ejercicio. *Demuestre que de hecho, el funtor $\widehat{\cdot}$ es adjunto a sí mismo (ya que puede ser visto como un funtor R-**Mód**$^\circ \to R$-**Mód** o R-**Mód** $\to R$-**Mód**$^\circ$) y $\eta_M \colon M \to \widehat{\widehat{M}}$ es precisamente la unidad de la adjunción.*

En general, si $F \colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es adjunto por la izquierda a $G \colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$, entonces

1) si F es exacto, entonces G preserva objetos inyectivos,

2) si G es exacto, entonces F preserva objetos proyectivos.

En efecto, por ejemplo, en el primer caso, si $I \in \mathbf{B}$ es inyectivo, entonces

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-, G(I)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(-), I)\colon \mathbf{A}^\circ \to \mathbf{Ab}$$

es exacto, siendo la composición de un funtor exacto $F\colon \mathbf{A}^\circ \to \mathbf{B}^\circ$ con un funtor exacto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(-, I)\colon \mathbf{B}^\circ \to \mathbf{Ab}$.

En nuestro caso, el funtor contravariante $\widehat{\cdot}$ es exacto y adjunto a sí mismo, y entonces preserva los objetos proyectivos en la categoría opuesta R-$\mathbf{Mód}^\circ$; en otras palabras, convierte cada R-módulo proyectivo en inyectivo. En particular, $\widehat{R\langle X\rangle}$ es inyectivo.