

# Álgebra homológica, día 10

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

19 de agosto de 2016

## 1. Resoluciones proyectivas

**1.1. Definición.** Sea  $\mathbf{A}$  una categoría abeliana. Se dice que en  $\mathbf{A}$  hay **suficientes objetos proyectivos** si para cada  $M \in \mathbf{A}$  existe un epimorfismo  $P \rightarrow M$  desde algún objeto proyectivo  $P$ .

Esto significa que cada objeto de la categoría es un cociente de un objeto proyectivo:  $M \cong P/K$  donde  $K$  es el núcleo de un epimorfismo  $P \rightarrow M$ . En particular, en la categoría  $R\text{-Mód}$  hay suficientes objetos proyectivos:

**1.2. Observación.** Para cada  $R$ -módulo  $M$  existe un epimorfismo  $P \rightarrow M$  desde algún  $R$ -módulo proyectivo.

*Demostración.* Para cada módulo  $M$  sea  $X$  un conjunto de sus generadores. Podemos considerar el módulo libre  $R\langle X \rangle$  y el epimorfismo correspondiente  $R\langle X \rangle \rightarrow M$  (que simplemente aplica  $x \in X$  a  $x$ ). No importa si  $M$  no es finitamente generado, por ejemplo siempre se puede tomar  $X = M$ . Cada módulo libre es proyectivo. ■

**1.3. Definición.** Sea  $M \in \mathbf{A}$  un objeto. Entonces su **resolución proyectiva** es un complejo  $P^\bullet$  formado por objetos proyectivos, con cuasi-isomorfismo de complejos  $\epsilon: P^\bullet \rightarrow M$ , donde  $M$  es el complejo correspondiente concentrado en el grado 0:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & P^{-2} & \longrightarrow & P^{-1} & \longrightarrow & P^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & & & & & \downarrow \epsilon & & & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Se ve que es la misma cosa que una sucesión exacta

$$\dots \rightarrow P^{-2} \rightarrow P^{-1} \rightarrow P^0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$$

donde cada  $P^n$  es proyectivo. La numeración  $P^0, P^{-1}, P^{-2}, \dots$  es un poco rara y sirve solo para que el complejo  $P^\bullet$  sea co-homológico (con diferenciales que incrementan el grado).

**1.4. Ejemplo.** Cada grupo abeliano  $A$  puede ser representado como  $F/R$  donde  $F$  es un grupo abeliano libre y  $R$  es su subgrupo de relaciones (que es también libre, como subgrupo de un grupo libre). Por lo tanto, los  $\mathbb{Z}$ -módulos tienen resoluciones proyectivas muy sencillas de la forma

$$0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow 0$$

Por ejemplo,  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  no es proyectivo, pero tiene una resolución proyectiva

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

▲

La cohomología  $H^n(P^\bullet)$  es, por la definición, poco interesante:

$$H^n(P^\bullet) \cong \begin{cases} M, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

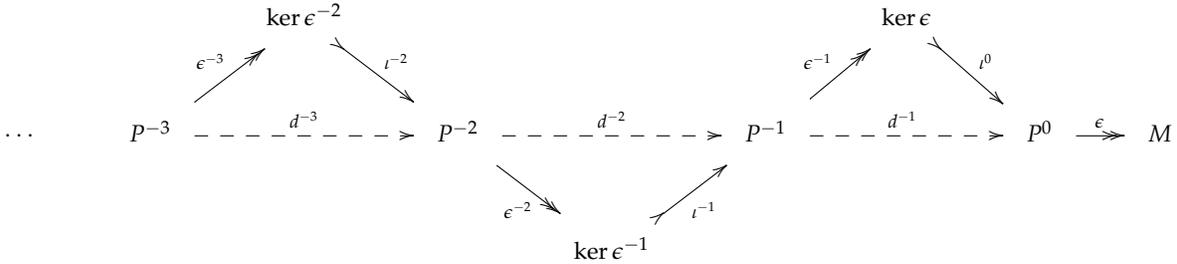
Sin embargo, en un rato las resoluciones nos van a servir para calcular funtores derivados. Antes de todo, tenemos que ver que resoluciones proyectivas siempre existen y, en cierto sentido, son únicas.

**1.5. Observación.** Si  $\mathbf{A}$  es una categoría abeliana con suficientes objetos proyectivos (por ejemplo, la categoría de  $R$ -módulos), entonces para cada objeto  $M \in \mathbf{A}$  existe una resolución proyectiva.

*Demostración.* Vamos a construir paso a paso una sucesión exacta

$$\dots \rightarrow P^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$$

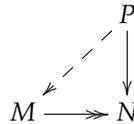
Primero, escojamos un epimorfismo  $\epsilon: P^0 \rightarrow M$  desde un objeto proyectivo  $P^0$ . Este epimorfismo tiene algún núcleo  $\iota^0: \ker \epsilon \rightarrow P^0$ . Luego, existe un epimorfismo  $\epsilon^{-1}: P^{-1} \rightarrow \ker \epsilon$ , donde  $P^{-1}$  es otro módulo libre. Este epimorfismo también tiene algún núcleo, etcétera. Así inductivamente construimos un diagrama



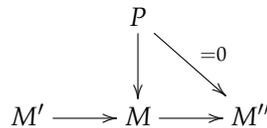
Definamos  $d^n := \iota^{n+1} \circ \epsilon^n$ . Se ve que todo esto da una resolución de  $M$ . ■

**1.6. Ejercicio.** Termine la demostración: verifique que la sucesión es exacta ("im  $d^{n-1} = \ker d^n$ " para cada  $n$ ; es una caza de diagramas sencilla).

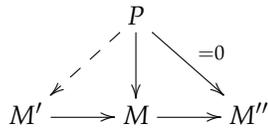
**1.7. Ejercicio.** Sea  $P$  un objeto proyectivo. Recuerde que esto es equivalente a la siguiente propiedad de extensión:



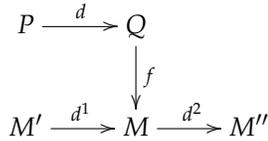
0) Deduzca la siguiente propiedad: si  $P$  es proyectivo y tenemos un diagrama conmutativo



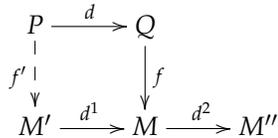
donde la fila  $M' \rightarrow M \rightarrow M''$  es exacta y la composición  $P \rightarrow M \rightarrow M''$  es el morfismo cero, entonces existe un morfismo  $P \rightarrow M'$  tal que el diagrama conmuta:



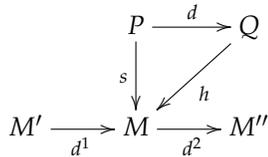
1) Sea  $P$  un objeto proyectivo. Supongamos que en el diagrama



la fila  $M' \rightarrow M \rightarrow M''$  es exacta y además  $d^2 \circ f \circ d = 0$ . Entonces existe un morfismo  $f' : P \rightarrow M'$  tal que  $f \circ d = d^1 \circ f'$ :

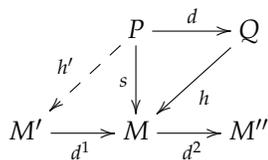


2) Sea  $P$  un objeto proyectivo. Supongamos que en el siguiente diagrama (*¡no necesariamente conmutativo!*) tenemos  $d^2 \circ h \circ d = d^2 \circ s$  y la fila  $M' \rightarrow M \rightarrow M''$  es exacta:



Entonces existe un morfismo  $h' : P \rightarrow M'$  tal que

$$d^1 \circ h' + h \circ d = s.$$



**1.8. Proposición.** Sea  $P^\bullet \rightarrow M$  una resolución proyectiva de  $M$  y  $Q^\bullet \rightarrow N$  otro complejo exacto (en particular,  $Q^\bullet \rightarrow N$  puede ser una resolución proyectiva de  $N$ ). Entonces cada morfismo  $f : M \rightarrow N$  induce un morfismo de complejos  $f^\bullet : P^\bullet \rightarrow Q^\bullet$  tal que  $f_0^* : H^0(P^\bullet) \rightarrow H^0(Q^\bullet)$  coincide con  $f : M \rightarrow N$ . Además,  $f^\bullet$  es único salvo homotopía.

*Demostración.* Tenemos el siguiente diagrama conmutativo donde las filas son exactas:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & P^{-2} & \xrightarrow{d^{-2}} & P^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & P^0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0 \\
& & & & & & \downarrow f \\
\cdots & \longrightarrow & Q^{-2} & \xrightarrow{\partial^{-2}} & Q^{-1} & \xrightarrow{\partial^{-1}} & Q^0 \xrightarrow{\epsilon'} N \longrightarrow 0
\end{array}$$

El punto 1) del ejercicio 1.7 nos permite construir inductivamente morfismos  $f^n: P^n \rightarrow Q^n$  que dan el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & P^{-2} & \xrightarrow{d^{-2}} & P^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & P^0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow f^{-2} & & \downarrow f^{-1} & & \downarrow f^0 \\
& & Q^{-2} & \xrightarrow{\partial^{-2}} & Q^{-1} & \xrightarrow{\partial^{-1}} & Q^0 \xrightarrow{\epsilon'} N \longrightarrow 0
\end{array}$$

Este  $f^\bullet$  no es necesariamente único, pero si existe otro morfismo de complejos  $g^\bullet: P^\bullet \rightarrow Q^\bullet$ , entonces podemos aplicar el punto 2) del ejercicio 1.7 a los morfismos  $s^n := f^n - g^n$  para obtener  $h^n$  tales que

$$s^n = h^{n+1} \circ d^n + \partial^{n-1} \circ h^n.$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & P^{-2} & \xrightarrow{d^{-2}} & P^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & P^0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow f^{-2} & \swarrow h^{-1} & \downarrow f^{-1} & \swarrow h^0 & \downarrow f^0 \\
& & Q^{-2} & \xrightarrow{\partial^{-2}} & Q^{-1} & \xrightarrow{\partial^{-1}} & Q^0 \xrightarrow{\epsilon'} N \longrightarrow 0
\end{array}$$

**1.9. Ejercicio.** Provea los detalles necesarios.

**1.10. Corolario.** La resolución proyectiva  $P^\bullet \rightarrow M$  está definida de modo único salvo homotopía de complejos.

*Demostración.* Sean  $P^\bullet \rightarrow M$  y  $Q^\bullet \rightarrow M$  dos resoluciones proyectivas de  $M$ . Entonces existen morfismos de complejos  $f^\bullet: P^\bullet \rightarrow Q^\bullet$  y  $g^\bullet: Q^\bullet \rightarrow P^\bullet$  que inducen en  $H^0$  el morfismo  $\text{id}_M: M \rightarrow M$ . Luego, las composiciones  $g^\bullet \circ f^\bullet$  y  $f^\bullet \circ g^\bullet$  deben ser equivalentes por una homotopía de cadenas a los morfismos identidades  $P^\bullet \rightarrow P^\bullet$  y  $Q^\bullet \rightarrow Q^\bullet$ . ■

## 2. Resoluciones inyectivas

**2.1. Definición.** Sea  $\mathbf{A}$  una categoría abeliana. Se dice que en  $\mathbf{A}$  hay **suficientes objetos inyectivos** si para cada  $M \in \mathbf{A}$  existe un monomorfismo  $M \rightarrow I$  hacia algún objeto inyectivo  $I$ .

Esto significa que cada objeto de la categoría es un sub-objeto de un objeto inyectivo:  $M \subset I$ .

**2.2. Hecho.** Hay suficientes  $R$ -módulos inyectivos; es decir, para cada  $R$ -módulo  $M$  existe un  $R$ -módulo inyectivo  $I$  tal que  $M$  es un submódulo de  $I$ .

Este resultado es un poco más técnico que la existencia de suficientes proyectivos en  $R\text{-Mód}$ , así que vamos a postponer su demostración a la siguiente sección.

**2.3. Definición.** Para un objeto  $M \in \mathbf{A}$  su **resolución inyectiva** es un complejo  $I^\bullet$  formado por objetos inyectivos, con cuasi-isomorfismo de complejos  $\iota: M \rightarrow I^\bullet$ :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & \downarrow & & & & & & \\ & & & & \iota & \text{cuasi-iso} & & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & I^2 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Se ve que esto corresponde a una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\iota} I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow I^2 \rightarrow \dots$$

donde  $I^n$  son inyectivos.

**2.4. Ejemplo.**  $\mathbb{Z}$  no es un  $\mathbb{Z}$ -módulo inyectivo, pero tiene una resolución inyectiva

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Los grupos  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  son divisibles y por lo tanto inyectivos. ▲

**2.5. Observación.** Si  $\mathbf{A}$  es una categoría abeliana con suficientes objetos inyectivos (por ejemplo, la categoría de  $R$ -módulos), entonces para cada objeto  $M$  existe una resolución inyectiva.

*Demostración.* Podemos usar la construcción similar a la de 1.5:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{coker } \iota & & & \text{coker } \iota^2 & \\ & \nearrow e^0 & & \searrow \iota^1 & & \nearrow e^2 & \\ M \xrightarrow{\iota} I^0 & \xrightarrow{d^0} & I^1 & \xrightarrow{d^1} & I^2 & \xrightarrow{d^2} & I^3 \rightarrow \dots \\ & & \searrow e^1 & & \nearrow \iota^2 & & \\ & & \text{coker } \iota^1 & & & & \end{array}$$

■

**2.6. Ejercicio.** Provea los detalles a la demostración de arriba. Verifique que la sucesión obtenida es exacta ("im  $d^n = \ker d^{n+1}$ " para cada  $n$ ).

Como en el caso de las resoluciones proyectivas, las resoluciones inyectivas son únicas salvo homotopía:

**2.7. Proposición.** Sean  $M \rightarrow I^\bullet$  y  $N \rightarrow J^\bullet$  algunas resoluciones inyectivas. Entonces cada morfismo de complejos  $f: M \rightarrow N$  induce un morfismo  $f^\bullet: I^\bullet \rightarrow J^\bullet$  tal que  $f_*^0: H^0(I^\bullet) \rightarrow H^0(J^\bullet)$  coincide con  $f: M \rightarrow N$ . Este  $f^\bullet$  es único salvo homotopía.

En particular, resolución inyectiva  $M \rightarrow I^\bullet$  está definida de modo único salvo homotopía de complejos.

### 3. Suficientes $R$ -módulos inyectivos

Como hemos visto, hay suficientes  $R$ -módulos proyectivos: para cada  $R$ -módulo  $M$  existe un  $R$ -módulo proyectivo  $P$  junto con un epimorfismo  $P \rightarrow M$ . La demostración era muy fácil porque se podía considerar el  $R$ -módulo libre apropiado  $R \langle X \rangle$ . La situación con módulos inyectivos es más sutil: no es tan obvio cómo a partir de un  $R$ -módulo  $M$  se puede construir un  $R$ -módulo inyectivo  $I$  tal que  $M \subset I$  es su submódulo. Hay dos métodos diferentes para demostrar que hay suficientes inyectivos: uno es construirlos directamente y otro es demostrar que la categoría  $R\text{-Mód}$  satisface ciertos axiomas adicionales que se tratan de productos infinitos (les recuerdo que los axiomas básicas de categorías abelianas se tratan solo de productos finitos  $M \oplus N$ ) y usar un teorema general del artículo de Tohoku de Grothendieck. El último método fue descubierto para demostrar que la categoría de haces de  $R$ -módulos tiene suficientes objetos inyectivos (y en general no tiene suficientes objetos proyectivos). Para nuestros objetivos va a ser suficiente el método explícito porque no nos interesan otras categorías abelianas, sino solamente la de  $R$ -módulos.

**3.1. Definición.** Si  $M$  es un  $R$ -módulo, sea

$$\widehat{M} := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

el grupo de homomorfismos de grupos abelianos  $f: M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  con acción de  $R$  definida por  $(r \cdot f)(x) := f(r \cdot x)$ .

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  es un grupo abeliano inyectivo, lo que significa que el funtor contravariante  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  es exacto (visto como un funtor con valores en  $\mathbf{Ab}$  o en  $R\text{-Mód}$ , gracias a la estructura de  $R$ -módulo sobre  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  definida arriba). Entonces tenemos la siguiente

**3.2. Observación.** *Tenemos un funtor exacto contravariante*

$$\widehat{\cdot}: R\text{-Mód}^{\circ} \rightarrow R\text{-Mód}.$$

Notamos que tenemos un isomorfismo natural en  $M$

$$\widehat{M} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \underline{\text{Hom}}_R(M, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})),$$

(es decir, isomorfismo de funtores  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \underline{\text{Hom}}_R(-, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$ ), lo que significa que  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  es un  $R$ -módulo inyectivo.

**3.3. Observación.** *Si  $M \neq 0$ , entonces  $\widehat{M} \neq 0$ . Es decir, si  $M \neq 0$ , entonces existe un morfismo de grupos abelianos no trivial  $M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Si  $M \neq 0$ , entonces  $M$  contiene un subgrupo abeliano cíclico no trivial  $M' \subset M$ , donde  $M' \cong \mathbb{Z}$  o  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Luego, como el grupo  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  es inyectivo, el monomorfismo  $M' \hookrightarrow M$  induce un epimorfismo  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M', \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ . Entonces es suficiente encontrar algún homomorfismo no trivial  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  o  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . En el primer caso, tenemos  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , y entonces hay un montón de homomorfismos no triviales; en el segundo caso  $1 \mapsto [1/n]$  define correctamente un homomorfismo no trivial. ■

El funtor  $\widehat{\cdot}: R\text{-Mód}^{\circ} \rightarrow R\text{-Mód}$  es exacto y contravariante, de donde el funtor  $\widehat{\cdot}$  es exacto covariante  $R\text{-Mód} \rightarrow R\text{-Mód}$ . Para cada  $M$  consideremos el morfismo de evaluación

\*Como siempre, si  $R$  no es conmutativo, la acción correcta es por la derecha: para un  $R$ -módulo izquierdo  $M$  el  $R$ -módulo  $\widehat{M}$  es naturalmente derecho.

$$\eta_M: M \rightarrow \widehat{M} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

$$x \mapsto (f \mapsto f(x)).$$

Se ve que estos morfismos son naturales: cada morfismo de  $R$ -módulos  $f: M \rightarrow N$  induce un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\eta_M} & \widehat{M} \\ f \downarrow & & \downarrow \widehat{f} \\ N & \xrightarrow{\eta_N} & \widehat{N} \end{array}$$

**3.4. Observación.** Para cada  $R$ -módulo  $M$  el morfismo natural  $\eta_M: M \rightarrow \widehat{M}$  es mono.

*Demostración.* Sea  $i: K \rightarrow M$  el núcleo de  $\eta_M$ . Tenemos que ver que  $K = 0$ . Gracias a 3.3, es suficiente demostrar que  $\widehat{K} = 0$ . El funtor  $\widehat{\phantom{x}}$  es exacto, y entonces induce un monomorfismo  $\widehat{i}: \widehat{K} \rightarrow \widehat{M}$ . Tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\eta_K} & \widehat{K} \\ i \downarrow & & \downarrow \widehat{i} \\ M & \xrightarrow{\eta_M} & \widehat{M} \end{array}$$

Tenemos  $\widehat{i} \circ \eta_K = \eta_M \circ i = 0$  y  $\widehat{i}$  es mono, y entonces  $\eta_K = 0$ . Pero esto implica que  $\widehat{K} = 0$ . De hecho, si  $\widehat{K} \neq 0$ , de donde existe un morfismo  $f: K \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  tal que  $f(x) \neq 0$  para algún  $x \in K$ . Pero en este caso  $\eta_K(x)(f) \neq 0$  que contradice el hecho que  $\eta_K = 0$ . ■

Ahora estamos listos para demostrar que en la categoría de  $R$ -módulos hay suficientes objetos inyectivos:

**3.5. Proposición.** Para cualquier  $R$ -módulo  $M$  existe un monomorfismo  $M \rightarrow I$  donde  $I$  es un  $R$ -módulo inyectivo.

*Demostración.* Consideremos el  $R$ -módulo  $\widehat{M}$ . Existe un epimorfismo  $R\langle X \rangle \rightarrow \widehat{M}$  desde algún  $R$ -módulo libre con generadores  $X$ . El funtor  $\widehat{\phantom{x}}$  es contravariante exacto, entonces tenemos un monomorfismo

$$\widehat{M} \rightarrow \widehat{R\langle X \rangle}$$

Además, como hemos visto,  $M \rightarrow \widehat{M}$ , entonces nos falta solo demostrar que  $\widehat{R\langle X \rangle}$  es inyectivo. Pero

$$\widehat{R\langle X \rangle} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R\langle X \rangle, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \underline{\text{Hom}}_R(R\langle X \rangle, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \cong \prod_{x \in X} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

es un producto de  $R$ -módulos inyectivos. ■

**3.6. Ejercicio.** Demuestre que de hecho, el funtor  $\widehat{\phantom{x}}$  es adjunto a sí mismo (ya que puede ser visto como un funtor  $R\text{-Mód}^\circ \rightarrow R\text{-Mód}$  o  $R\text{-Mód} \rightarrow R\text{-Mód}^\circ$ ) y  $\eta_M: M \rightarrow \widehat{M}$  es precisamente la unidad de la adjunción.

En general, si  $F: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  es adjunto por la izquierda a  $G: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ , entonces

- 1) si  $F$  es exacto, entonces  $G$  preserva objetos inyectivos,
- 2) si  $G$  es exacto, entonces  $F$  preserva objetos proyectivos.

En efecto, por ejemplo, en el primer caso, si  $I \in \mathbf{B}$  es inyectivo, entonces

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-, G(I)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(-), I): \mathbf{A}^{\circ} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

es exacto, siendo la composición de un funtor exacto  $F: \mathbf{A}^{\circ} \rightarrow \mathbf{B}^{\circ}$  con un funtor exacto  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(-, I): \mathbf{B}^{\circ} \rightarrow \mathbf{Ab}$ .

En nuestro caso, el funtor contravariante  $\widehat{\phantom{x}}$  es exacto y adjunto a sí mismo, y entonces preserva los objetos proyectivos en la categoría opuesta  $R\text{-}\mathbf{Mód}^{\circ}$ ; en otras palabras, convierte cada  $R$ -módulo proyectivo en inyectivo. En particular,  $\widehat{R\langle X \rangle}$  es inyectivo.