Álgebra homológica, día 11

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

22 de agosto de 2016

1. Construcción de funtores derivados

Ahora estamos listos para demostrar existencia de los funtores derivados que hemos definido de manera axiomática como δ-funtores universales.

1.1. Teorema. *Sea* $\mathbf{A}$ *una categoría abeliana con suficientes objetos proyectivos. Sea* $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *un funtor aditivo exacto por la derecha. Para un objeto* $M \in \mathbf{A}$ *escojamos una resolución proyectiva* $P^\bullet \twoheadrightarrow M$*:*

$$\cdots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \to M \to 0$$

(¡cuidado: usamos numeración por números negativos!). Entonces la cohomología del complejo

$$\cdots \to F(P^{-2}) \to F(P^{-1}) \to F(P^0) \to 0$$

da los valores en M *de los funtores derivados por la izquierda de* F*:*

$$L_n F(M) = H^{-n}(F(P^\bullet)).$$

1.2. Observación. *En particular, si* P *es proyectivo, entonces* $L_n F(P) = 0$ *para todo* $n > 0$.

Demostración. Si P es proyectivo, entonces P tiene una resolución proyectiva que consiste de P en grado 0. Aplicando F obtenemos el complejo

$$\cdots \to 0 \to 0 \to F(P) \to 0 \to \cdots$$

cuya cohomología es dada por $H^0 = F(P)$ y $H^n = 0$ para $n \neq 0$. ∎

1.3. Teorema. *Sea* $\mathbf{A}$ *una categoría abeliana con suficientes objetos inyectivos. Sea* $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *un funtor aditivo exacto por la izquierda. Para un objeto* $M \in \mathbf{A}$ *escojamos una resolución inyectiva* $M \rightarrowtail I^\bullet$*:*

$$0 \to M \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \cdots$$

Entonces

$$R^n F(M) = H^n(F(I^\bullet))$$

son los funtores derivados por la derecha de F.

1.4. Observación. *En particular, si* I *es inyectivo, entonces* $R^n F(I) = 0$ *para todo* $n > 0$.

Por la definición de δ-funtores universales, o desde las fórmulas $L_n F(M) = H^{-n}(F(P^\bullet))$ y $R^n F(M) = H^n(F(I^\bullet))$ está clara la siguiente

1.5. Observación. *Si $U\colon \mathbf{B} \to \mathbf{B}'$ es un funtor aditivo exacto, entonces*

$$L_n(U \circ F) \cong U \circ (L_n F),$$
$$R^n(U \circ F) \cong U \circ (R^n F).$$

Será suficiente demostrar uno de los dos teoremas, por ejemplo el primero sobre funtores exactos por la derecha y resoluciones proyectivas. El otro teorema se deja como ejercicio para el lector.

<u>La definición no depende de las resoluciones.</u> Si tenemos dos resoluciones $P^\bullet \twoheadrightarrow M$ y $Q^\bullet \twoheadrightarrow M$, entonces $P^\bullet$ y $Q^\bullet$ son complejos homotópicos, y $F(P^\bullet)$ y $F(Q^\bullet)$ son también homotópicos (porque cualquier funtor aditivo preserva homotopías).

<u>$L_n F$ son funtores aditivos $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$.</u> Un morfismo $f\colon M \to N$ induce de manera funtorial morfismos $L_n F(M) \to L_n F(N)$. De hecho, si tenemos resoluciones $P^\bullet \twoheadrightarrow M$ y $Q^\bullet \twoheadrightarrow N$, entonces f induce un morfismo de complejos $f^\bullet\colon P^\bullet \to Q^\bullet$ tal que $H^0(f^\bullet) = f$. Además, $f^\bullet$ es único salvo homotopía, y por lo tanto los morfismos $H^{-n}(f^\bullet)\colon L_n F(M) \to L_n F(N)$ son bien definidos.

<u>Tenemos isomorfismos de funtores $L_0 F \cong F$.</u> Para $M \in \mathbf{A}$, escojamos una resolución proyectiva

$$\cdots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \twoheadrightarrow M \to 0$$

Por nuestra hipótesis, el funtor F es exacto por la derecha, y entonces tenemos una sucesión exacta

$$F(P^{-1}) \to F(P^0) \twoheadrightarrow F(M) \to 0$$

Esto quiere decir que en el complejo $F(P^\bullet)$ tenemos

$$H^0(F(P^\bullet)) = L_0 F(M) = \operatorname{coker}(F(P^{-1}) \to F(P^0)) \cong F(M)$$

La naturalidad de este isomorfismo es fácil de ver (de nuevo, tenemos que usar la funtorialidad de las resoluciones).

<u>$L_n F$ es un δ-funtor izquierdo.</u> Para cada sucesión exacta corta de objetos en $\mathbf{A}$

$$0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

tenemos que definir morfismos de conexión $\delta_n\colon L_n(N) \to L_{n-1}(K)$. Escojamos resoluciones proyectivas $P^\bullet \twoheadrightarrow K$ y $Q^\bullet \twoheadrightarrow M$. Sea $f^\bullet$ el morfismo inducido entre las resoluciones y $C(f)$ su cono. Tenemos una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \to Q^\bullet \rightarrowtail C(f) \twoheadrightarrow P^\bullet[1] \to 0$$

Notemos que por la definición $C(f)^n := Q^n \oplus P^{n+1}$ donde Q^n y P^{n+1} son proyectivos, por lo que $C(f)^n$ es proyectivo para cada n. Tenemos $H^n(P^\bullet) = H^n(Q^\bullet) = 0$ para $n \neq 0$ porque $P^\bullet$ y $Q^\bullet$ son resoluciones. Entonces la sucesión exacta larga de cohomología asociada a la sucesión de complejos $Q^\bullet \rightarrowtail C(f) \twoheadrightarrow P^\bullet[1]$ nos dice que $H^n(C(f)) = 0$ para $n \neq 0$ y que $H^0(Q^\bullet) \to H^0(C(f))$ coincide con el morfismo g:

$$\cdots \to 0 \to H^0(P^\bullet) \xrightarrow{H^0(f)} H^0(Q^\bullet) \to H^0(C(f)) \to 0 \to \cdots$$

Esto quiere decir que $C(f)$ es una resolución proyectiva de N.

El funtor F es aditivo, de donde $F(C(f)) = C(F(f))$ y $F(P^\bullet[1]) = F(P^\bullet)[1]$, y por lo tanto tenemos una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \to F(Q^\bullet) \rightarrowtail F(C(f)) \twoheadrightarrow F(P^\bullet)[1] \to 0$$

que induce una sucesión exacta larga de cohomología

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & H^{-2}(F(P^\bullet)[1]) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^{-1}(F(Q^\bullet)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^{-1}(F(C(f))) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^{-1}(F(P^\bullet)[1]) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^0(F(Q^\bullet)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^0(F(C(f))) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^0(F(P^\bullet)[1]) \arrow[d, equal] \\
\cdots \arrow[r] & L_1(K) \arrow[r] & L_1(M) \arrow[r] & L_1(N) \arrow[r, "\delta"] & L_0(K) \arrow[r] & L_0(M) \arrow[r] & L_0(N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Para ver que los morfismos de conexión son funtoriales, recordemos que los conos respetan homotopías. Si tenemos un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "a"] & M_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "b"] & N_1 \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_2 \arrow[r, "f_2"'] & M_2 \arrow[r, "g_2"'] & N_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

entonces podemos escoger resoluciones proyectivas $Q_1^\bullet \twoheadrightarrow K_1$, $P_1^\bullet \twoheadrightarrow K_2$, $Q_2^\bullet \twoheadrightarrow M_1$, $P_2^\bullet \twoheadrightarrow M_2$. Los morfismos a, b, f_1, f_2 inducen morfismos entre resoluciones

$$a^\bullet \colon P_1^\bullet \to P_2^\bullet, \quad b^\bullet \colon Q_1^\bullet \to Q_2^\bullet, \quad f_1^\bullet \colon P_1^\bullet \to Q_1^\bullet, \quad f_2^\bullet \colon P_2^\bullet \to Q_2^\bullet.$$

Luego la identidad $f_2 \circ a = b \circ f_1$ se vuelve una homotopía $f_2^\bullet \circ a^\bullet \simeq b^\bullet \circ f_1^\bullet$. Entonces tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
P_1^\bullet \arrow[r, "f_1^\bullet"] \arrow[d, "a^\bullet"'] & Q_1^\bullet \arrow[r, "i_1^\bullet"] \arrow[d, "b^\bullet"'] & C(f_1) \arrow[r, "p_1^\bullet"] \arrow[d, dashed, "c^\bullet"'] & P_1^\bullet[1] \arrow[d, "a^\bullet[1]"] \\
P_2^\bullet \arrow[r, "f_2^\bullet"'] & Q_2^\bullet \arrow[r, "i_2^\bullet"'] & C(f_2) \arrow[r, "p_2^\bullet"'] & P_2^\bullet[1]
\end{tikzcd}$$

donde el primer cuadrado es homotópicamente conmutativo y los otros dos son conmutativos. Se ve que $c^\bullet$ es el morfismo entre resoluciones proyectivas que induce el morfismo $c \colon N_1 \to N_2$. Aplicando el funtor F y calculando la cohomología, tenemos un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
H^{-n}(F(P_1^\bullet)) \arrow[r, "F(f_1^\bullet)_*"] \arrow[d, "F(a^\bullet)_*"'] & H^{-n}(F(Q_1^\bullet)) \arrow[r, "F(i_1^\bullet)_*"] \arrow[d, "F(b^\bullet)_*"'] & H^{-n}(C(F(f_1))) \arrow[r, "F(p_1^\bullet)_*"] \arrow[d, "F(c^\bullet)_*"'] & H^{-n+1}(F(P_1^\bullet)) \arrow[d, "F(a^\bullet[1])_*"] \\
H^{-n}(F(P_2^\bullet)) \arrow[r, "F(f_2^\bullet)_*"'] & H^{-n}(F(Q_2^\bullet)) \arrow[r, "F(i_2^\bullet)_*"'] & H^{-n}(C(F(f_2))) \arrow[r, "F(p_2^\bullet)_*"'] & H^{-n+1}(F(P_2^\bullet))
\end{tikzcd}$$

que es el diagrama buscado:

$$\begin{tikzcd}
L_n(K_1) \arrow[r] \arrow[d, "L_n(a)"'] & L_n(M_1) \arrow[r] \arrow[d, "L_n(b)"'] & L_n(N_1) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "L_n(c)"'] & L_{n-1}(K_1) \arrow[d, "L_{n-1}(a)"] \\
L_n(K_2) \arrow[r] & L_n(M_2) \arrow[r] & L_n(N_2) \arrow[r, "\delta_n"'] & L_{n-1}(K_2)
\end{tikzcd}$$

La conmutatividad del cuadrado a la derecha no es sino la funtorialidad de morfismos de conexión.

L_nF es un δ-funtor universal. Según el teorema sobre los δ-funtores borrables, es suficiente demostrar que L_nF es borrable, es decir que para cada $M \in \mathbf{A}$ y cada $n > 0$ existe un epimorfismo $N \twoheadrightarrow M$ tal que $L_n(N) = 0$. Podemos tomar un epimorfismo $P \twoheadrightarrow M$ desde un objeto proyectivo P (aquí usamos la hipótesis que $\mathbf{A}$ tiene suficientes objetos proyectivos).

1.6. Ejercicio. *Demuestre 1.3: si hay suficientes inyectivos, entonces $R^nF(M) = H^n(F(I^\bullet))$ son los funtores derivados por la derecha de M (el argumento es idéntico, solo que hay que trabajar con objetos inyectivos).*

2. Funtores derivados Ext

Para cualquier categoría abeliana $\mathbf{A}$ tenemos nuestros funtores preferidos exactos por la izquierda, contravariante y covariante:

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(-,N)\colon \mathbf{A}^\circ &\to \mathbf{Ab}, \\ \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,-)\colon \mathbf{A} &\to \mathbf{Ab}. \end{aligned}$$

Entonces, para estas categorías existen funtores derivados por la derecha, cuando respectivamente en la categoría $\mathbf{A}^\circ$ y $\mathbf{A}$ hay suficientes objetos inyectivos. Notamos que los objetos inyectivos en $\mathbf{A}^\circ$ corresponden a los objetos proyectivos en $\mathbf{A}$.

2.1. Definición. Para dos objetos $M, N \in \mathbf{A}$ sus funtores Ext son

$$\begin{aligned} {}_I\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(-,N) &:= R^n\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(-,N), \quad \text{si hay suficientes proyectivos en } \mathbf{A} \\ {}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M,-) &:= R^n\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,-), \quad \text{si hay suficientes inyectivos en } \mathbf{A}. \end{aligned}$$

La notación “Ext” viene de la palabra “extensión”.

A priori, ${}_I\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}$ y ${}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}$ son dos cosas diferentes: para calcular el primero, tenemos que escoger una resolución proyectiva $P^\bullet \twoheadrightarrow M$ y calcular la cohomología del complejo $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(P^\bullet, N)$; para calcular el segundo, tenemos que escoger una resolución inyectiva $N \rightarrowtail I^\bullet$ y calcular la cohomología del complejo $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M, I^\bullet)$. Afortunadamente (si hay suficientes objetos proyectivos e inyectivos y ambos Ext existen) para cada n tenemos isomorfismos naturales

$${}_I\operatorname{Ext}^n_R(M,N) \cong {}_{II}\operatorname{Ext}^n_R(M,N).$$

Vamos a demostrarlo en un rato.

2.2. Observación.

$$\begin{aligned} &{}_I\operatorname{Ext}^0_{\mathbf{A}}(M,N) \cong {}_{II}\operatorname{Ext}^0_{\mathbf{A}}(M,N) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,N), \\ &{}_I\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(P,N) = {}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(P,N) = 0 \textit{ para } n > 0, \textit{ si } P \textit{ es proyectivo}, \\ &{}_I\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M,I) = {}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M,I) = 0 \textit{ para } n > 0, \textit{ si } I \textit{ es inyectivo}. \end{aligned}$$

Demostración. Tenemos la primera fórmula porque los $\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(-,-)$ son los funtores derivados de $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(-,-)$.

Las fórmulas ${}_I\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(P,N) = 0$ y ${}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M,I) = 0$ para $n > 0$ son consecuencias de las propiedades generales 1.2 y 1.4.

Luego, ${}_I\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(-,I) := R^n\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(-,I) = 0$ y ${}_{II}\operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(P,-) := R^n\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(P,-) = 0$ para $n > 0$ porque estamos tomando los funtores derivados de los funtores exactos $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(-,I)$ y $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(P,-)$ (*por la definición* de objetos inyectivos y proyectivos). ∎

En la próxima clase vamos a demostrar el siguiente

2.3. Teorema (Balanceo de los Ext**).** *Supongamos que en* $\mathbf{A}$ *hay suficientes objetos proyectivos e inyectivos. Entonces tenemos isomorfismos naturales*

$$_I \operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M,N) \cong {}_{II} \operatorname{Ext}^n_{\mathbf{A}}(M,N).$$