Álgebra homológica, día 13

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

24 de agosto de 2016

1. Anillos y módulos graduados

Para cada R-módulo M se pueden construir de manera canónica ciertas R-álgebras graduadas $T(M)$ y $\Lambda(M)$, llamadas el **álgebra tensorial** y **álgebra exterior** de M. Primero recordemos las definiciones de álgebras graduadas.

1.1. Definición. Un R**-álgebra** (asociativa) es un R-módulo con multiplicación bilineal

$$\cdot\colon A \times A \to A$$

que tiene una identidad $1 \in A$ tal que para cada $x \in A$

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x,$$

y que es asociativa:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

Un **morfismo** de R-álgebras es una aplicación $\phi\colon A \to B$ que es R-lineal y un homomorfismo de anillos:

$$\begin{aligned} \phi(r \cdot x) &= r \cdot \phi(x), \\ \phi(x+y) &= \phi(x) + \phi(y), \\ \phi(x \cdot y) &= \phi(x) \cdot \phi(y), \\ \phi(1_A) &= 1_B. \end{aligned}$$

Nuestras álgebras no son conmutativas.

1.2. Definición. Se dice que A es una R-álgebra **graduada** si tenemos una descomposición en suma directa de R-módulos

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n,$$

que satisface $R \cdot A_n \subseteq A_n$ y $A_m \cdot A_n \subseteq A_{m+n}$.

Un **morfismo** de álgebras graduadas $\phi\colon A \to B$ es un morfismo de álgebras que satisface $\phi(A_n) \subseteq B_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Si tenemos $x \in A_n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, se dice que x es un elemento de grado $\deg x = n$ y que x es **homogéneo**. Los elementos de A son sumas finitas de elementos homogéneos. Las álgebras graduadas sobre R forman una categoría que vamos a denotar por R-**ÁlgGr**.

1.3. Ejemplo. El anillo de polinomios $A := R[X_1, \ldots, X_n]$ es una R-álgebra graduada por R-módulos libres

$$A_d := R\left\langle \text{monomios } X^{i_1} \cdots X^{i_n} \text{ de grado total } d = i_1 + \cdots + i_n \right\rangle.$$

▲

2. Álgebra tensorial y exterior

2.1. Definición. Para un R-módulo M su **álgebra tensorial** es la R-álgebra graduada

$$T(M) := \bigoplus_{n \ge 0} M^{\otimes n},$$

donde

$$M^{\otimes 0} := R \quad \text{y} \quad M^{\otimes n} := \underbrace{M \otimes_R \cdots \otimes_R M}_{n} \text{ para } n > 0.$$

y la multiplicación es inducida por

$$M^{\otimes m} \times M^{\otimes n} \to M^{\otimes (m+n)},$$
$$((x_1 \otimes \cdots \otimes x_m),\ (y_1 \otimes \cdots \otimes y_n)) \mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n.$$

(se ve que es una aplicación R-bilineal que se extiende a la multiplicación sobre $T(M)$).

2.2. Observación. *$T(-)$ es un funtor R-**Mód** $\to$ R-**ÁlgGr**. A saber, para un morfismo de R-módulos $\phi \colon M \to N$ existe un único morfismo de R-álgebras graduadas $T(\phi) \colon T(M) \to T(N)$ que coincide con ϕ en grado 1:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & N \arrow[d] \\ T(M) \arrow[r, dashed, "T(\phi)"] & T(N) \end{tikzcd}$$

Este funtor es adjunto por la izquierda al funtor olvidadizo

$$R\text{-}\mathbf{ÁlgGr} \to R\text{-}\mathbf{Mód},$$
$$A \mapsto A_1.$$

Es decir, existe una biyección natural

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{R\text{-}ÁlgGr}}(T(M), A) \cong \operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mód}}(M, A_1).$$

Demostración. Cada elemento del álgebra $T(M)$ es una suma de elementos de la forma $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$, es decir, productos de elementos de grado 1, por lo que cada morfismo de álgebras graduadas $T(M) \to A$ queda definido de modo único por su restricción al morfismo correspondiente de R-módulos $\phi \colon M \to A_1$:

$$M^{\otimes n} \to A_n,$$
$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \mapsto \phi(x_1) \cdots \phi(x_n).$$

En particular, un morfismo de R-módulos, $\phi \colon M \to N$ induce un morfismo de R-álgebras graduadas $T(\phi) \colon T(M) \to T(N)$ definido en cada grado por

$$M^{\otimes n} \to N^{\otimes n},$$
$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \mapsto \phi(x_1) \otimes \cdots \otimes \phi(x_n).$$

Está claro que $\phi \rightsquigarrow T(\phi)$ es un funtor. ∎

2.3. Definición. Para un R-módulo su **álgebra exterior** es

$$\Lambda(M) := T(M)/I,$$

donde I es el ideal bilátero de $T(M)$ generado por elementos $x \otimes x$ para $x \in M$. Es un ideal homogéneo (generado por elementos de grado 2), y entonces se ve que $\Lambda(M)$ es también una R-álgebra graduada con la graduación inducida por la graduación de M:

$$\Lambda(M) = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n(M).$$

La multiplicación en $\Lambda(M)$ se denota por $\wedge$. La imagen de $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in M^{\otimes n}$ en $\Lambda^n(M)$ es $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$.

Cada elemento homogéneo $x \in \Lambda^n(M)$ es una suma de elementos de la forma $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ para algunos $x_i \in M$. Por la definición de $\Lambda(M)$, tenemos $x \wedge x = 0$ para cada $x \in M$. Esto implica también que

1) para cada $x, y \in M$ tenemos $x \wedge y = -y \wedge x$ (de hecho, $0 = (x+y) \wedge (x+y) = x \wedge y + y \wedge x$);

2) para cada elemento de la forma $x = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ tenemos $x \wedge x = 0$.

2.4. Ejercicio. *Deduzca que en general,*

1) si x e y son elementos homogéneos en $\Lambda(M)$, entonces

$$x \wedge y = (-1)^{\deg x \cdot \deg y}\, y \wedge x;$$

2) si x es un elemento homogéneo en $\Lambda(M)$, entonces

$$x \wedge x = 0 \text{ si } \deg x \text{ es impar}.$$

Todo esto quiere decir que el álgebra $\Lambda(M)$ es conmutativa salvo signos $\pm$ que dependen del grado de elementos.

2.5. Definición. Se dice que una R-álgebra graduada A es **conmutativa**[*] si

1) si x y y son elementos homogéneos en A, entonces

$$x \cdot y = (-1)^{\deg x \cdot \deg y}\, y \wedge x;$$

2) si x es un elemento homogéneo en A, entonces

$$x \cdot x = 0 \text{ si } \deg x \text{ es impar.}$$

Vamos a denotar por R-**ÁlgGrConm** la categoría de R-álgebras graduadas conmutativas en el sentido de arriba.

2.6. Observación. *$\Lambda(-)$ es un funtor R-**Mód** $\to$ R-**ÁlgGrConm**. A saber, para un morfismo de R-módulos $\phi\colon M \to N$ existe un único morfismo de R-álgebras graduadas conmutativas $\Lambda(\phi)\colon \Lambda(M) \to \Lambda(N)$ que coincide con ϕ en grado 1:*

[*] En inglés, también se dice "skew-commutative", "graded-commutative" o "supercommutative", pero es la única noción de conmutatividad de las álgebras graduadas que vamos a ocupar, así que voy a decir simplemente que A es conmutativa.

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & N \arrow[d] \\
\Lambda(M) \arrow[r, dashed, "\Lambda(\phi)"] & \Lambda(N)
\end{tikzcd}
$$

Este funtor es adjunto por la izquierda al funtor olvidadizo

$$\begin{gathered} R\text{-}\mathbf{\acute{A}lgGrConm} \to R\text{-}\mathbf{M\acute{o}d}, \\ A \mapsto A_1. \end{gathered}$$

Es decir, existe una biyección natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{R\text{-}\acute{A}lgGrConm}}(\Lambda(M), A) \cong \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{M\acute{o}d}}(M, A_1).$$

Demostración. Un morfismo de R-módulos, $\phi\colon M \to N$ induce un morfismo de R-álgebras graduadas conmutativas $\Lambda(\phi)\colon \Lambda(M) \to \Lambda(N)$ definido en cada grado por

$$\begin{gathered} \Lambda^n(M) \to \Lambda^n(M), \\ x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \phi(x_1) \wedge \cdots \wedge \phi(x_n). \end{gathered}$$

Está claro que $\phi \rightsquigarrow \Lambda(\phi)$ es un funtor.

En general, si A es un álgebra graduada conmutativa, entonces cada morfismo de R-módulos $M \to A_1$ se extiende de modo único a un morfismo de R-álgebras $\phi\colon T(M) \to A$. Luego, A es graduada conmutativa, de donde $\phi(x)^2 = 0$ para cada $x \in T^1(M)$ y en consecuencia ϕ induce un único morfismo $\phi\colon \Lambda(M) \to A$. ■

2.7. Ejercicio. *Sean A y B dos R-álgebras graduadas conmutativas. Sea $A \otimes_R B$ su producto tensorial como R-módulos. Es graduado de modo natural:*

$$(A \otimes_R B)_n = \bigoplus_{p+q=n} A_p \otimes_R B_q.$$

Definamos un producto sobre $A \otimes_R B$ por la fórmula

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) := (-1)^{\deg a_2 \cdot \deg b_1} (a_1 \cdot a_2) \otimes (b_1 \cdot b_2).$$

1) *Con este producto, $A \otimes_R B$ es también un R-álgebra graduada conmutativa.*

2) *$A \otimes_R B$ satisface la propiedad universal de coproductos en la categoría R-**ÁlgGrConm**.*

Cada funtor adjunto por la izquierda preserva coproductos. Entonces tenemos

2.8. Corolario. *Para R-módulos M y N hay isomorfismo natural de álgebras graduadas conmutativas*

$$\Lambda(M \oplus N) \cong \Lambda(M) \otimes_R \Lambda(N).$$

En particular,

$$\Lambda^n(M \oplus N) \cong \bigoplus_{p+q=n} \Lambda^p(M) \otimes_R \Lambda^q(N).$$

2.9. Ejercicio.

1) *Sea M un R-módulo libre de rango n, es decir $M \cong R^{\oplus n}$. Entonces $\Lambda^k(M)$ es un R-módulo libre de rango $\binom{n}{k}$. En particular, $\Lambda^k(M) = 0$ para $k > n$.*

2) *Deduzca la identidad combinatoria*

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{p+q=k} \binom{n}{p} \binom{m}{q}.$$

3. Complejos de Koszul y homología de Koszul

3.1. Definición. Sea F un R-módulo (libre para nuestros objetivos) y $f\colon F \to R$ un morfismo R-lineal. El **complejo de Koszul** $K_\bullet(f)$ es el complejo (con numeración homológica) definido por

$$K_\bullet(f)\colon \quad \cdots \to \Lambda^4(F) \to \Lambda^3(F) \to \Lambda^2(F) \to F \xrightarrow{f} R \to 0$$

con diferenciales

$$\begin{aligned} d_k\colon \Lambda^k(F) &\to \Lambda^{k-1}(F), \\ x_1 \wedge \cdots \wedge x_k &\mapsto \sum_{1\le i\le k} (-1)^{i+1} f(x_i)\, x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_k. \end{aligned}$$

Aquí $\widehat{x_i}$ significa que x_i se omite del producto exterior $x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$. Si M es un R-módulo, la **homología de Koszul** correspondiente está definida por

$$H_n(f; M) := H_n(K_\bullet(f) \otimes_R M).$$

Antes de todo, se ve que la fórmula de arriba define un morfismo de R-módulos $d_n\colon \Lambda^k(F) \to \Lambda^{k-1}(F)$. Tenemos que ver que $K_\bullet(f)$ es de verdad un complejo:

3.2. Observación. *Tenemos $d_{k-1} \circ d_k = 0$ para cada k.*

Demostración. Podemos escribir

$$d_k = \sum_{1\le i\le k} (-1)^{i+1}\, \partial_i,$$

donde ∂_i es la aplicación

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_k \mapsto f(x_i)\, x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_k.$$

Tenemos

$$d_{k-1} \circ d_k = \sum_{\substack{1\le i\le k-1\\ 1\le j\le k}} (-1)^{i+j}\, \partial_i \circ \partial_j = \sum_{1\le i<j\le k} (-1)^{i+j}\, \partial_i \circ \partial_j + \sum_{1\le j\le i\le k-1} (-1)^{i+j}\, \partial_i \circ \partial_j.$$

Observamos que

$$\partial_i \circ \partial_j = \partial_{j-1} \circ \partial_i \quad \text{para } i < j.$$

Entonces

$$d_{k-1} \circ d_k = \sum_{1\le i<j\le k} (-1)^{i+j}\, \partial_{j-1} \circ \partial_i + \sum_{1\le j\le i\le k-1} (-1)^{i+j}\, \partial_i \circ \partial_j.$$

Cambiando el índice de la primera suma por $j-1$, obtenemos

$$-\sum_{1\le i\le j\le k-1} (-1)^{i+j}\, \partial_j \circ \partial_i + \sum_{1\le j\le i\le k-1} (-1)^{i+j}\, \partial_i \circ \partial_j = 0.$$

∎

Hemos demostrado que en general, si ∂_i son algunos morfismos $C_n \to C_{n-1}$ que satisfacen la identidad

$$(*) \qquad \partial_i \circ \partial_j = \partial_{j-1} \circ \partial_i \quad \text{para } i < j,$$

entonces la fórmula $\sum_{1 \le i \le k} (-1)^{i+1} \partial_i$ define el diferencial del complejo $C_\bullet$. En topología algebraica todos los diferenciales que se construyen de modo explícito tienen esta forma (por ejemplo el complejo singular, complejo de Čech, etc.). La identidad (*) es una de las **identidades simpliciales**.

Jean-Louis Koszul (1921–) es un matemático francés, estudiante de Henri Cartan, conocido por sus contribuciones en álgebra y geometría. Varios conceptos en el álgebra homológica tienen su nombre: álgebras de Koszul, dualidad de Koszul, cohomología de Koszul, etc. Sin embargo, los complejos de Koszul no fueron descubiertos por Koszul; ya habían aparecido en trabajos de Cayley (1821–1895) y Hilbert (1862–1943) antes de que Koszul naciera.

3.3. Observación. *La construcción del complejo de Koszul es funtorial. A saber, si tenemos dos R-módulos F_1 y F_2 con aplicaciones R-lineales $f_1 \colon F_1 \to R$ y $f_2 \colon F_2 \to R$ y morfismo de R-módulos $\phi \colon F_1 \to F_2$ que conmuta con f_1 y f_2:*

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[dr, "f_1"] \arrow[dd, "\phi"'] & \\ & R \\ F_2 \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd}$$

entonces ϕ induce de modo funtorial un morfismo de complejos de Koszul $K_\bullet(f_1) \to K_\bullet(f_2)$.

Demostración. Las álgebras exteriores $\Lambda^k(-)$ son funtoriales, de donde en cada grado tenemos morfismos $\Lambda^k(\phi) \colon \Lambda^k(F_1) \to \Lambda^k(F_2)$. Solo tenemos que ver que es un morfismo de complejos:

$$\begin{tikzcd} \Lambda^k(F_1) \arrow[r, "d_k^1"] \arrow[d, "\Lambda^k(\phi)"'] & \Lambda^{k-1}(F_1) \arrow[d, "\Lambda^{k-1}(\phi)"] \\ \Lambda^k(F_2) \arrow[r, "d_k^2"'] & \Lambda^{k-1}(F_2) \end{tikzcd}$$

y de hecho,

$$
\begin{aligned}
\Lambda^{k-1}(\phi) \circ d_k^1(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k) &= \sum_{1 \leq i \leq k} (-1)^{i+1} f_1(x_i)\, \phi(x_1) \wedge \cdots \wedge \widehat{\phi(x_i)} \wedge \cdots \wedge \phi(x_k) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq k} (-1)^{i+1} f_2 \circ \phi(x_i)\, \phi(x_1) \wedge \cdots \wedge \widehat{\phi(x_i)} \wedge \cdots \wedge \phi(x_k) \\
&= d_k^2 \circ \Lambda^k(\phi)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k).
\end{aligned}
$$

■