Álgebra homológica, día 16

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

29 de agosto de 2016

1. Definición de la cohomología local

1.1. Definición. Sea R un anillo conmutativo y $\mathfrak{a} \subseteq R$ un ideal. Para cada R-módulo M sea

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) := \{m \in M \mid \mathfrak{a}^n \cdot m = 0 \text{ para algún } n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

su **submódulo de $\mathfrak{a}$-torsión**. Aquí $\mathfrak{a}^n$ denota el ideal formado por los productos $a_1 \cdots a_n$ para $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{a}$.

Está claro que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ es un submódulo: si tenemos $\mathfrak{a}^{n_1} \cdot m_1 = 0$ y $\mathfrak{a}^{n_2} \cdot m_2 = 0$, entonces $\mathfrak{a}^{\text{máx}(n_1,n_2)} \cdot (m_1 + m_2) = 0$.

1.2. Observación. *Si $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, entonces $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \supseteq \Gamma_{\mathfrak{b}}(M)$.*

Recordemos también la noción del **radical** de un ideal:

1.3. Definición. Para un ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ su **radical** es dado por

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{r \in R \mid r^n \in \mathfrak{a} \text{ para algún } n\}.$$

Se ve que $\sqrt{\mathfrak{a}}$ es también un ideal (a saber, si $r_1^{n_1} \in \mathfrak{a}$ y $r_2^{n_2} \in \mathfrak{a}$, es fácil verificar que $(r_1 + r_2)^{n_1+n_2} \in \mathfrak{a}$).

1.4. Observación. *Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son dos ideales tales que $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$, entonces $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \Gamma_{\mathfrak{b}}(M)$ para cada M.*

Demostración. Se ve que $\Gamma_{\sqrt{\mathfrak{a}}}(M) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$. ■

1.5. Ejemplo. Si $R = \mathbb{Z}$ y $\mathfrak{a} = (p)$ es el ideal generado por un número primo p, entonces $\Gamma_{(p)}(A)$ es el **subgrupo de p^∞-torsión**:

$$\Gamma_{(p)}(A) = A[p^\infty] = \{n \in A \mid p^k \cdot n = 0 \text{ para algún } k\}.$$

▲

1.6. Observación. *$\Gamma_{\mathfrak{a}}$ es un funtor R-**Mód** $\to$ R-**Mód** aditivo y exacto por la izquierda.*

Demostración. Cada morfismo de R-módulos $f\colon M \to N$ se restringe al morfismo $f\colon \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$: si $m \in M$ es un elemento tal que $\mathfrak{a}^n \cdot m = 0$, entonces $\mathfrak{a}^n \cdot f(m) = f(\mathfrak{a}^n \cdot m) = 0$. Luego, si tenemos una sucesión exacta

$$0 \to K \to M \xrightarrow{f} N$$

se ve que la sucesión correspondiente de los submódulos de $\mathfrak{a}$-torsión es también exacta:

$$0 \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(K) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \xrightarrow{f|_{\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)}} \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$$

—es decir, $\Gamma_{\mathfrak{a}}(K)$ es el núcleo de $f|_{\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)}$. ■

Como siempre, si tenemos un funtor aditivo exacto por la izquierda, nuestro primer impulso es tomar sus funtores derivados por la derecha:

1.7. Definición. La **cohomología local de** M **con soporte en** $\mathfrak{a} \subseteq R$ está dada por

$$H^i_{\mathfrak{a}}(M) := (R^i\Gamma_{\mathfrak{a}})(M).$$

La palabra "local" significa nada más que normalmente en las aplicaciones, R es un anillo local y $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ es el ideal maximal de R.

1.8. Ejemplo. Para calcular $H^i_{(p)}(\mathbb{Z})$, empezamos por una resolución inyectiva de $\mathbb{Z}$:

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

Es una sucesión exacta corta de grupos abelianos que induce la sucesión exacta larga de cohomología

$$0 \to \mathbb{Z}[p^\infty] \to \mathbb{Q}[p^\infty] \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}[p^\infty] \to H^1_{(p)}(\mathbb{Z}) \to H^1_{(p)}(\mathbb{Q}) \to H^1_{(p)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \cdots$$

Pero $\mathbb{Z}[p^\infty] = \mathbb{Q}[p^\infty] = 0$ y $H^i_{(p)}(\mathbb{Q}) = H^i_{(p)}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ para $i > 0$ porque $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son inyectivos. De la sucesión exacta concluimos que

$$H^i_{(p)}(\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}[p^\infty] = \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z} = \{\frac{m}{p^k} \pmod{\mathbb{Z}} \mid k = 0, 1, 2, \ldots\}, & i = 1, \\ 0, & i \neq 1. \end{cases}$$

▲

1.9. Ejemplo. El anillo de polinomios $\mathbb{K}[X]$ tiene propiedades similares a $\mathbb{Z}$ porque es también un dominio de ideales principales. Una resolución inyectiva de $\mathbb{K}[X]$ es dada por

$$0 \to \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}(X) \to \mathbb{K}(X)/\mathbb{K}[X] \to 0$$

Aquí $\mathbb{K}(X)$ y $\mathbb{K}(X)/\mathbb{K}[X]$ son $\mathbb{K}[X]$-módulos inyectivos porque son divisibles, y sobre los DIP "divisible" implica "inyectivo" (gracias al criterio de Baer). Sea $\mathfrak{a} = (X)$. Tenemos

$$\begin{gathered} \Gamma_{(X)}(\mathbb{K}(X)) = 0, \\ \Gamma_{(X)}(\mathbb{K}(X)/\mathbb{K}[X]) \cong \mathbb{K}[X, X^{-1}]/\mathbb{K}[X]. \end{gathered}$$

Entonces, como en el ejemplo anterior, se ve que

$$H^i_{(X)}(\mathbb{K}[X]) = \begin{cases} \mathbb{K}[X, X^{-1}]/\mathbb{K}[X], & i = 1, \\ 0, & i \neq 1. \end{cases}$$

En general, si M es un $\mathbb{K}[X]$-módulo finitamente generado, es isomorfo a una suma directa de módulos cíclicos $\mathbb{K}[X]/(g)$ para $g \in \mathbb{K}[X]$ (es el "teorema fundamental de la aritmética" para los módulos sobre los dominios de ideales principales; recuerden el caso similar de $R = \mathbb{Z}$). Los funtores derivados $H^i_{\mathfrak{a}}(-)$ conmutan con sumas directas, entonces para calcular la cohomología local de cada $\mathbb{K}[X]$-módulo finitamente generado es suficiente calcular la cohomología local de $\mathbb{K}[X]/(g)$ para cada $g \in \mathbb{K}[X]$. Ya sabemos la respuesta para $g = 0$, y en general podemos usar la sucesión exacta corta

$$0 \to \mathbb{K}[X] \xrightarrow{g} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]/(g) \to 0$$

que induce la sucesión exacta larga de cohomología

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0_{(X)}(\mathbb{K}[X]) \arrow[r, "g"] & H^0_{(X)}(\mathbb{K}[X]) \arrow[r] & H^0_{(X)}(\mathbb{K}[X]/(g)) \arrow[dll, out=0, in=180] \\
& H^1_{(X)}(\mathbb{K}[X]) \arrow[r, "g"] & H^1_{(X)}(\mathbb{K}[X]) \arrow[r] & H^1_{(X)}(\mathbb{K}[X]/(g)) \arrow[dll, out=0, in=180] \\
& H^2_{(X)}(\mathbb{K}[X]) \arrow[r, "g"] & H^2_{(X)}(\mathbb{K}[X]) \arrow[r] & H^2_{(X)}(\mathbb{K}[X]/(g)) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Pero $H^i_{(X)}(\mathbb{K}[X]) = 0$ para $i \neq 1$, entonces se ve que $H^i_{(X)}(\mathbb{K}[X]/(g)) = 0$ para $i > 1$ y nos queda la sucesión exacta

$$0 \to H^0_{(X)}(\mathbb{K}[X]/(g)) \to \mathbb{K}[X, X^{-1}]/\mathbb{K}[X] \xrightarrow{g} \mathbb{K}[X, X^{-1}]/\mathbb{K}[X] \to H^1_{(X)}(\mathbb{K}[X]/(g)) \to 0$$

Escribamos

$$g = X^n \cdot h \quad \text{donde } h \in \mathbb{K}[X],\ (X, h) = 1.$$

Se ve que la acción de h sobre $\mathbb{K}[X, X^{-1}]/\mathbb{K}[X]$ es identidad; de hecho, tenemos $b\,h = 1 - a\,X$ para algunos polinomios $a, b \in \mathbb{K}[X]$ y la acción de $1 - a\,X$ es identidad porque la acción de X aniquila los elementos de $\mathbb{K}[X, X^{-1}]/\mathbb{K}[X] = \Gamma_{(X)}(\mathbb{K}(X)/\mathbb{K}[X])$. Entonces $H^0_{(X)}(\mathbb{K}[X]/(g))$ es el núcleo de la multiplicación por X^n sobre $\mathbb{K}[X, X^{-1}]/\mathbb{K}[X]$ y $H^1_{(X)}(\mathbb{K}[X]/(g))$ es su conúcleo. La multiplicación por X^n es sobreyectiva y por lo tanto $H^1_{(X)}(\mathbb{K}[X]/(g)) = 0$. El núcleo está generado por X^{-n} y es isomorfo a $\mathbb{K}[X]/(X^n)$.

$$H^i_{(X)}(\mathbb{K}[X]/(g)) = \begin{cases} \mathbb{K}[X]/(X^n), & i = 0, \\ 0, & i \neq 0. \end{cases}$$

▲

2. Otra interpretación de la cohomología local

2.1. Observación. *$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ puede ser identificado con el límite directo de los R-módulos $\underline{\mathrm{Hom}}_R(R/\mathfrak{a}^n, M)$:*

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \cong \varinjlim_{n>0} \underline{\mathrm{Hom}}_R(R/\mathfrak{a}^n, M).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) &:= \{m \in M \mid \mathfrak{a}^n \cdot m = 0 \text{ para algún } n > 0\} \\
&= \bigcup_{n>0} \{m \in M \mid \mathfrak{a}^n \cdot m = 0\} \\
&= \varinjlim_{n>0} \{m \in M \mid \mathfrak{a}^n \cdot m = 0\} \\
&\cong \varinjlim_{n>0} \underline{\mathrm{Hom}}_R(R/\mathfrak{a}^n, M).
\end{aligned}$$

■

2.2. Corolario. *Tenemos isomorfismos naturales (de δ-funtores)*

$$H^i_{\mathfrak{a}}(M) \cong \varinjlim_{n>0} \mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}^n, M).$$

Demostración. Los funtores $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ y $\varinjlim_{n>0} \underline{\mathrm{Hom}}_R(R/\mathfrak{a}^n, -)$ son isomorfos, entonces

$$H^i_{\mathfrak{a}}(-) := R^i\Gamma_{\mathfrak{a}}(-) \cong R^i \varinjlim_{n>0} \underline{\mathrm{Hom}}_R(R/\mathfrak{a}^n, -) \cong \varinjlim_{n>0} \underbrace{R^i\underline{\mathrm{Hom}}_R(R/\mathfrak{a}^n, -)}_{\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}^n, -)}.$$

El último isomorfismo es el hecho que el funtor $\varinjlim$ es exacto. ∎

3. Complejos de Koszul y localizaciones

Consideremos el complejo de Koszul $K_\bullet(x_1, \ldots, x_n)$. Para cada $\ell = 1, 2, 3, \ldots$ tenemos un morfismo entre los complejos de Koszul

$$\phi_\ell \colon K_\bullet(x_1^{\ell+1}, \ldots, x_n^{\ell+1}) \to K_\bullet(x_1^\ell, \ldots, x_n^\ell)$$

que en grado 0 está definido por

$$\begin{aligned} \phi^0_\ell \colon F &\to F, \\ e_i &\mapsto x_i \cdot e_i. \end{aligned}$$

Recordemos que $K_\bullet(x_1^\ell, \ldots, x_n^\ell)$ es el complejo definido a partir de la aplicación $f^{(\ell)} \colon e_i \mapsto x_i^\ell$. Tenemos $f^{(\ell)} \circ \phi^0_\ell = f^{(\ell+1)}$; entonces ϕ^0_ℓ induce una aplicación entre los complejos de Koszul. Si pasamos a los complejos duales (aplicando el funtor $\underline{\mathrm{Hom}}_R(-, R)$), tenemos morfismos de complejos

$$\phi^\bullet_\ell \colon K^\bullet(x_1^\ell, \ldots, x_n^\ell) \to K^\bullet(x_1^{\ell+1}, \ldots, x_n^{\ell+1}).$$

En general, para $\ell_1 < \ell_2$ podemos considerar los morfismos de complejos $K^\bullet(x_1^{\ell_1}, \ldots, x_n^{\ell_1}) \to K^\bullet(x_1^{\ell_2}, \ldots, x_n^{\ell_2})$ definidos por $\underbrace{\phi_\ell \circ \cdots \circ \phi_\ell}_{\ell_2 - \ell_1}$. Estos morfismos forman un sistema directo y entonces podemos tomar el límite directo correspondiente.

3.1. Notación. El complejo de Koszul $K^\bullet(x_1^\infty, \ldots, x_n^\infty)$ es el límite directo de complejos $K^\bullet(x_1^\ell, \ldots, x_n^\ell)$:

$$K^\bullet(x_1^\infty, \ldots, x_n^\infty) := \varinjlim_\ell K^\bullet(x_1^\ell, \ldots, x_n^\ell).$$

La cohomología de Koszul correspondiente es dada por

$$H^i(x_1^\infty, \ldots, x_n^\infty; M) := H^i(K^\bullet(x_1^\infty, \ldots, x_n^\infty) \otimes_R M).$$

El hecho que $\varinjlim$ es un funtor exacto implica que $\varinjlim$ conmuta con cohomología:

3.2. Observación.

$$H^i(x_1^\infty, \ldots, x_n^\infty; M) = \varinjlim_\ell H^i(x_1^\ell, \ldots, x_n^\ell; M).$$

Pero ¿qué es exactamente $\varinjlim_\ell K^\bullet(x_1^\ell, \ldots, x_n^\ell)$? Es el límite directo en la categoría de complejos de R-módulos, pero al final es la misma cosa que el complejo formado por los límites directos calculados grado por grado. En general, si M es un R-módulo y $M_\ell \to M_{\ell+1}$ son morfismos de multiplicación por un elemento fijo $x \in R$, entonces

$$\varinjlim_\ell M_\ell \cong M[x^{-1}]$$

es precisamente la localización. En nuestro caso, para cada t el R-módulo $K^t(x_1, \ldots, x_n)$ es libre de base $(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_t})^*$, donde $1 \le i_1 < \cdots < i_t \le n$, y los morfismos ϕ_ℓ^t están dados por la multiplicación por $x_{i_1} \cdots x_{i_t}$ sobre cada componente. Luego

$$K^t(x_1^\infty, \ldots, x_n^\infty) \cong \bigoplus_{1 \le i_1 < \cdots < i_t \le n} R_{x_{i_1} \cdots x_{i_t}}.$$

Podemos definir un complejo formado por sumas directas de localizaciones:

3.3. Definición. Para $x_1, \ldots, x_n \in R$ sea $C^\bullet$ el complejo donde

$$C^t := \bigoplus_{1 \le i_1 < \cdots < i_t \le n} R_{x_{i_1} \cdots x_{i_t}}$$

y los diferenciales $C^t \to C^{t+1}$ están definidos por

$$d^t := \sum_{1 \le s \le t} (-1)^{s+1} \partial^s,$$

$$\partial^s \colon R_{x_{i_1} \cdots x_{i_t}} \to R_{x_{j_1} \cdots x_{j_{t+1}}} := \begin{cases} R_{x_{i_1} \cdots x_{i_t}} \to (R_{x_{i_1} \cdots x_{i_t}})_{x_{j_s}}, & \text{si } \{i_1, \ldots, i_t\} = \{j_1, \ldots, \widehat{j_s}, \ldots, j_{t+1}\}, \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

($R_{x_{i_1} \cdots x_{i_t}} \to (R_{x_{i_1} \cdots x_{i_t}})_{x_{j_s}}$ es el morfismo canónico asociado a la localización de $R_{x_{i_1} \cdots x_{i_t}}$ en x_{j_s}). En particular, tenemos $C^0 = R$ y el morfismo d^0

$$d^0 \colon R \to R_{x_1} \oplus \cdots \oplus R_{x_n}$$

está inducido por los morfismos canónicos de localización $R \to R_{x_i}$.

Como siempre, para demostrar la identidad $d^{t+1} \circ d^t = 0$, basta verificar la identidad $\partial^j \circ \partial^i = \partial^i \circ \partial^{j-1}$ para $i < j$ (¡ejercicio!).

Un comentario para el lector que conoce geometría algebraica. El complejo $C^\bullet$ es parecido al **complejo de Čech** del espacio $X = \operatorname{Spec} R$ (con topología de Zariski) y sus subconjuntos abiertos $U_i := \operatorname{Spec} R_{x_i}$. En particular, $U_i \cap U_j = \operatorname{Spec} R_{x_i \cdot x_j}$. La única diferencia es que el complejo de Čech empieza por nuestro C^1 (con renumeración correspondiente).

3.4. Observación. *Tenemos un isomorfismo de complejos*

$$\psi_\infty^\bullet \colon K^\bullet(x_1^\infty, \ldots, x_n^\infty) \cong C^\bullet$$

definido por

$$\psi_\ell^t \colon K^t(x_1^\ell, \ldots, x_n^\ell) := \Lambda^t(F)^\vee \to C^t := \bigoplus_{1 \le i_1 < \cdots < i_t \le n} R_{x_{i_1} \cdots x_{i_k}},$$
$$(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_t})^* \mapsto \frac{1}{(x_{i_1} \cdots x_{i_t})^\ell},$$

donde $(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_t})^*$ es el elemento de la base dual a la base $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_t}\}$ de $\Lambda^t F$.

Demostración. Tenemos que verificar varias cosas:

1) Cada ψ_ℓ es un morfismo de complejos: tenemos diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^t(F)^\vee \arrow[r, "d^*_{t+1}"] \arrow[d, "\psi^t_\ell"'] & \Lambda^{t+1}(F)^\vee \arrow[d, "\psi^{t+1}_\ell"] \\
C^t \arrow[r, "d^t"'] & C^{t+1}
\end{tikzcd}$$

2) Para cada $\ell \geq 0$ tenemos un diagrama conmutativo de morfismos de complejos

$$\begin{tikzcd}
K^\bullet(x_1^\ell, \dots, x_n^\ell) \arrow[dd, "\varphi^\bullet_\ell"'] \arrow[dr, "\psi^\bullet_\ell"] & \\
& C^\bullet \\
K^\bullet(x_1^{\ell+1}, \dots, x_n^{\ell+1}) \arrow[ur, "\psi^\bullet_{\ell+1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Se sigue que los $\psi^\bullet_\ell$ inducen un morfismo de complejos

$$\psi^\bullet_\infty \colon K^\bullet(x_1^\infty, \dots, x_n^\infty) \to C^\bullet.$$

3) $\psi^\bullet_\infty$ es un isomorfismo.

La parte 2) está clara, la parte 3) es la identificación del límite directo con la localización correspondiente, y en 1) por cálculos directos tenemos

$$\begin{aligned}
\psi^{t+1}_\ell \circ d^*_{t+1}(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_t})^* &= (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_t})^* \circ d_{t+1} \\
&= \psi^{t+1}_\ell \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_{t+1} \leq n} \begin{cases} (-1)^{s+1}\, x_{j_s}\, (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_s} \wedge \cdots \wedge e_{i_t})^*, & \text{si } \{i_1, \dots, i_t\} = \{j_1, \dots, \widehat{j_s}, \dots, j_{t+1}\} \\ 0, & \text{en el caso contrario} \end{cases} \\
&= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_{t+1} \leq n} \begin{cases} (-1)^{s+1} \underbrace{\dfrac{1}{(x_{i_1} \cdots x_{i_t})^\ell}}_{\in R_{(x_{i_1} \cdots x_{i_t}) x_{j_s}}}, & \text{si } \{i_1, \dots, i_t\} = \{j_1, \dots, \widehat{j_s}, \dots, j_{t+1}\} \\ 0, & \text{en el caso contrario,} \end{cases}
\end{aligned}$$

y luego es fácil ver que $d^t \circ \psi^t_\ell(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_t})^* = d^t\left(\frac{1}{(x_{i_1} \cdots x_{i_t})^\ell}\right)$ son la misma cosa. ■

3.5. Corolario.

$$H^i(x_1^\infty, \dots, x_n^\infty; M) \cong H^i(C^\bullet \otimes_R M).$$