Álgebra homológica, día 3

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

10 de agosto de 2016

1. Funtores adjuntos

Como hemos notado en la primera lección, el funtor $\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,-)\colon R\text{-}\mathbf{Mód} \to R\text{-}\mathbf{Mód}$ está relacionado con el funtor $-\otimes_R M\colon R\text{-}\mathbf{Mód} \to R\text{-}\mathbf{Mód}$ por la biyección *natural*

$$\operatorname{Hom}_R(L\otimes_R M, N) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_R(L, \underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)).$$

Este es un caso particular de funtores adjuntos:

1.1. Definición. Sean $F\colon \mathbf{C}\to\mathbf{D}$ y $G\colon \mathbf{D}\to\mathbf{C}$ dos funtores entre categorías $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$. Se dice que F es **adjunto por la izquierda** a G y que G es **adjunto por la derecha** a F si para cada $X\in\mathbf{C}$ y $Y\in\mathbf{D}$ tenemos una biyección natural

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X),Y)\cong\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X,G(Y)).$$

La naturalidad quiere decir que para X fijo la biyección

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X),-)\cong\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X,G(-))$$

es un isomorfismo de funtores $\mathbf{D}\to\mathbf{Set}$, y para Y fijo la biyección

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(-),Y)\cong\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-,G(Y))$$

es también un isomorfismo de funtores $\mathbf{C}^\circ\to\mathbf{Set}$.

1.2. Ejemplo.

- En la primera lección hemos visto que el funtor $-\otimes_R M$ es adjunto por la izquierda a $\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,-)$:

  $$\operatorname{Hom}_R(L\otimes_R M,N)\cong\operatorname{Hom}_R(L,\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)).$$

- Tenemos un isomorfismo *natural* $L\otimes_R M\cong M\otimes_R L$, de donde el funtor $M\otimes_R -$ es adjunto por la izquierda a $\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,-)$:

  $$\operatorname{Hom}_R(M\otimes_R L,N)\cong\operatorname{Hom}_R(L\otimes_R M,N)\cong\operatorname{Hom}_R(L,\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)).$$

- El funtor contravariante $\underline{\operatorname{Hom}}_R(-,N)$ es adjunto... a sí mismo:

  $$\operatorname{Hom}_R(L,\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N))\cong\operatorname{Hom}_R(L\otimes_R M,N)\cong\operatorname{Hom}_R(M\otimes_R L,N)\cong\operatorname{Hom}_R(M,\underline{\operatorname{Hom}}_R(L,N)).$$

  En efecto, el funtor $\underline{\operatorname{Hom}}_R(-,N)$ es contravariante y puede ser visto como un funtor $R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ\to R\text{-}\mathbf{Mód}$ o como un funtor $R\text{-}\mathbf{Mód}\to R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ$. Entonces la biyección natural de arriba puede ser escrita como

  $$\operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ}(\underline{\operatorname{Hom}}_R(L,N),M)\cong\operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mód}}(L,\underline{\operatorname{Hom}}_R(M,N)).$$

  y el funtor $\underline{\operatorname{Hom}}_R(-,N)\colon R\text{-}\mathbf{Mód}\to R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ$ es adjunto por la izquierda al funtor $\underline{\operatorname{Hom}}_R(-,N)\colon R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ\to R\text{-}\mathbf{Mód}$. Es una situación bastante común cuando un funtor contravariante $F\colon\mathbf{C}^\circ\to\mathbf{C}$ es adjunto a sí mismo, precisamente porque F puede ser visto como un funtor $\mathbf{C}\to\mathbf{C}^\circ$.

▲

Curiosamente, los funtores adjuntos fueron descubiertos por Daniel Kan (1927–2013) en los 50 cuando él asistió a lecciones de álgebra homológica de Eilenberg y vio la adjunción entre $- \otimes_R M$ y $\underline{\operatorname{Hom}}_R(M, -)$. Cuando Eilenberg y Mac Lane sentaron las bases de la teoría de categorías, ellos no se dieron cuenta de la importancia de las adjunciones ya que relacionan funtores $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ y $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ que van en direcciones *opuestas*. Kan era estudiante de Eilenberg y descubrió varias aplicaciones de métodos categóricos a geometría, específicamente la teoría de homotopías.

El término "funtores adjuntos" fue introducido por el categorista William Lawvere y viene del análisis funcional: se dice que dos operadores $A\colon H_1 \to H_2$ y $A^*\colon H_2 \to H_1$ entre espacios de Hilbert son **adjuntos** si

$$\langle Ah_1, h_2 \rangle_2 = \langle h_1, A^* h_2 \rangle_1.$$

Lawvere aprendió categorías mientras daba clases de análisis funcional. ¿No es un ejemplo espectacular de la utilidad del análisis?

1.3. Ejercicio. *Los funtores adjuntos aparecen en varios contextos en álgebra y geometría. Lamentablemente, no tenemos bastante tiempo para ver muchos ejemplos; aquí sugiero algunos como ejercicios. Verifique que en la lista de abajo los funtores son de verdad funtores, describa explícitamente las biyecciones* $\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y))$ *y demuestre que son naturales.*

- *Ya hemos visto otra adjunción en la primera lección. Tenemos el **funtor olvidadizo** R-**Mód** $\to$ **Set** que para cada R-módulo M "olvida" su estructura y asocia a M el conjunto subyacente M. La construcción del R-módulo libre $R\langle X \rangle$ a partir de un conjunto X es el funtor adjunto por la izquierda a este funtor:*

$$\operatorname{Hom}_R(R\langle X \rangle, M) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, M).$$

- *La adjunción entre $- \otimes_R M$ y $\underline{\operatorname{Hom}}_R(M, -)$ tiene un análogo aún más sencillo. Para cada conjunto fijo X tenemos el funtor*

$$- \times X\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$$

que es adjunto por la izquierda al funtor

$$(-)^X := \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, -)\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set},$$

es decir, tenemos una biyección natural

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(Y \times X, Z) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(Y, Z^X).$$

- *Si X es un espacio topológico, podemos olvidar su topología y considerar a X como un conjunto. Esto define el funtor olvidadizo*

$$Olv\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}.$$

*Un funtor adjunto a Olv debe ir en la otra dirección: para un conjunto X definir alguna topología sobre el mismo. De hecho, hay dos modos canónicos de hacerlo: definir sobre X la **topología discreta**, donde cada subconjunto $U \subseteq X$ es abierto, o la **topología indiscreta**, donde los únicos subconjuntos abiertos son $\emptyset$ y X. Esto define dos funtores diferentes*

$$Discr, Indiscr\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}.$$

Resulta que Olv es adjunto por la izquierda a $Indiscr$ y por la derecha a $Discr$:

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(Olv(X), Y) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Indiscr(Y)),$$
$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}(Discr(X), Y) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Olv(Y)).$$

- *Tenemos el funtor de inclusión de la categoría de grupos abelianos en la categoría de grupos:*

$$i\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}.$$

  Un funtor adjunto a i debe construir un grupo abeliano a partir de un grupo G de manera canónica. Como sabemos, tenemos que considerar la ***abelianización****:*

$$G^{\mathrm{ab}} := G/[G,G].$$

  Es un funtor $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ *que es adjunto por la izquierda a i:*

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Ab}}(G^{\mathrm{ab}}, A) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, i(A)).$$

- *Si R es un anillo, entonces sus elementos invertibles forman un grupo* $R^\times$*. Es un funtor*

$$(-)^\times\colon \mathbf{Ring} \to \mathbf{Grp}.$$

  Un funtor adjunto debe construir cierto anillo a partir de un grupo G de manera canónica. Es la construcción del anillo $\mathbb{Z}[G]$ *que consiste de las sumas formales* $\sum_{g\in G} n_g\, g$ *y la multiplicación está definida por la multiplicación en G. Esto es un funtor*

$$\mathbb{Z}[-]\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ring},$$

  que es adjunto por la izquierda a $(-)^\times$*:*

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}[G], R) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, R^\times).$$

Los funtores adjuntos están relacionados con los funtores representables:

1.4. Observación.

1) *Para un funtor* $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *existe un adjunto por la derecha si y solamente si para cada* $Y \in \mathbf{D}$ *el funtor*

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(-), Y)\colon \mathbf{C}^\circ &\to \mathbf{Set}, \\ X &\mapsto \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \end{aligned}$$

   es representable, es decir isomorfo a $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X')$ *para algún* $X' \in \mathbf{C}$.

2) *Para un funtor* $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *existe un adjunto por la izquierda si y solamente si para cada* $X \in \mathbf{C}$ *el funtor*

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(-))\colon \mathbf{D} &\to \mathbf{Set}, \\ Y &\mapsto \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y)) \end{aligned}$$

   es representable, es decir isomorfo a $\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(Y', -)$ *para algún* $Y' \in \mathbf{D}$.

Demostración. Por ejemplo, veamos la primera parte. Si F es adjunto por la izquierda a G, entonces para cada $Y \in \mathbf{D}$ tenemos el isomorfismo natural

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(-), Y) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(-, G(Y))$$

y $X' := G(Y)$ representa el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(-), Y)$. Recíprocamente, supongamos que para cada $Y \in \mathbf{D}$ tenemos isomorfismos

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(-), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X').$$

Sea $G(Y) := X'$. Un morfismo $f\colon Y_1 \to Y_2$ en $\mathbf{D}$ induce una transformación natural entre funtores

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X_1') \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(-), Y_1) \xRightarrow{f\circ -} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(-), Y_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X_2'),$$

que por el encajamiento de Yoneda corresponde a un morfismo único $X_1' \to X_2'$. Esto define un morfismo $G(f)\colon G(X_1) \to G(X_2)$, y se ve que G es un funtor $\mathbf{D} \to \mathbf{C}$. ∎

1.5. Observación (Uno de los adjuntos define al otro, salvo isomorfismo).

1) *Si $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ es adjunto por la izquierda a dos funtores $G, G'\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, entonces $G \cong G'$.*

2) *Si $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ es adjunto por la derecha a dos funtores $F, F'\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, entonces $F \cong F'$.*

Demostración. Demostremos la primera parte y la segunda es idéntica. Si tenemos biyecciones naturales

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G'(Y)),$$

entonces por el lema de Yoneda tenemos isomorfismos $\alpha_Y\colon G(Y) \xrightarrow{\cong} G'(Y)$ para cada Y. Para que esto sea un isomorfismo de funtores $G \cong G'$, falta verificar que los α_Y definen una transformación natural, es decir que para cada morfismo $f\colon Y \to Y'$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
G(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] \arrow[d, "G(f)"'] & G'(Y) \arrow[d, "G'(f)"] \\
G(Y') \arrow[r, "\alpha_{Y'}"'] & G'(Y')
\end{tikzcd}$$

Pero, también gracias a Yoneda, este diagrama es conmutativo si y solamente si para cada X el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y)) \arrow[r, "\alpha_{Y*}"] \arrow[d, "G(f)_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G'(Y)) \arrow[d, "G'(f)_*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y')) \arrow[r, "\alpha_{Y'*}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G'(Y'))
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, y por la naturalidad de la biyección, el último diagrama corresponde a

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y')
\end{tikzcd}$$

∎

1.6. Ejemplo. Todo esto quiere decir que el funtor $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, -)$ define, salvo isomorfismo, el funtor $- \otimes_R M$ y vice versa. ▲

La propiedad de ser un funtor adjunto (por la izquierda o por la derecha) es muy fuerte y tiene muchas consecuencias interesantes. Por ejemplo,

1.7. Observación. *Sea $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un funtor adjunto por la izquierda a $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$. Entonces F preserva coproductos y G preserva productos, es decir para cualesquiera $X, X' \in \mathbf{C}$ y $Y, Y' \in \mathbf{D}$*

$$\begin{aligned} F(X \sqcup X') &\cong F(X) \sqcup F(X'), \\ G(Y \times Y') &\cong G(Y) \times G(Y'). \end{aligned}$$

Demostración. Según un ejercicio de la última lección, para cualquier objeto Z tenemos isomorfismos naturales

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(Z, X \times X') &\cong \operatorname{Hom}(Z, X) \times \operatorname{Hom}(Z, Y'), \\ \operatorname{Hom}(X \sqcup X', Z) &\cong \operatorname{Hom}(X, Z) \times \operatorname{Hom}(X', Z). \end{aligned}$$

Ahora tenemos isomorfismos naturales para cada $Z \in \mathbf{D}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X \sqcup X'), Z) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X \sqcup X', G(Z)) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Z)) \times \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X', G(Z)) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Z) \times \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(F(X'), Z) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X) \sqcup F(X'), Z). \end{aligned}$$

Y el lema de Yoneda implica que $F(X \sqcup X') \cong F(X) \sqcup F(X')$. De modo similar se demuestra que $G(Y \times Y') \cong G(Y) \times G(Y')$. ∎

A veces es útil otra descripción de adjunción de funtores:

1.8. Observación. *Consideremos una adjunción*

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y)).$$

En particular, tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(X)) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, GF(X)), \\ \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(FG(Y), Y) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(G(Y), G(Y)). \end{aligned}$$

- *Sea $\eta_X\colon X \to GF(X)$ el morfismo que corresponde al morfismo identidad $\mathrm{id}\colon F(X) \to F(X)$ bajo la primera biyección.*
- *Sea $\epsilon_Y\colon FG(Y) \to Y$ el morfismo que corresponde al morfismo identidad $\mathrm{id}\colon G(Y) \to G(Y)$ bajo la segunda biyección.*

*Entonces los η_X definen una transformación natural $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}} \Rightarrow G \circ F$ (la **unidad de la adjunción**) y los ϵ_Y definen una transformación natural $F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{D}}$ (las **counidad de la adjunción**), y la adjunción puede ser escrita como*

$$\begin{aligned} &\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y)), \\ &(F(X) \xrightarrow{f} Y) \mapsto (GF(X) \xrightarrow{G(f)} G(Y)) \circ (X \xrightarrow{\eta_X} GF(X)), \\ (FG(Y) \xrightarrow{\epsilon_Y} Y) \circ (F(X) \xrightarrow{F(g)} FG(Y)) &\leftarrow\!\shortmid (X \xrightarrow{g} G(Y)). \end{aligned}$$

Demostración. Por ejemplo, para ver que $\eta_X \colon X \to GF(X)$ define una transformación natural, tenemos que ver que los siguientes diagramas son conmutativos para cada morfismo $\phi \colon X \to X'$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\phi"'] & GF(X) \arrow[d, "GF(\phi)"] \\
X' \arrow[r, "\eta_{X'}"'] & GF(X')
\end{tikzcd}$$

De hecho, por la definición de η_X, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(X)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "F(\phi)\circ -"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, GF(X)) \arrow[d, "GF(\phi)\circ -"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(X')) \arrow[r, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, GF(X')) \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X'), F(X')) \arrow[r, "\cong"'] \arrow[u, "-\circ F(\phi)"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X', GF(X')) \arrow[u, "-\circ \phi"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{F(X)} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \eta_X \arrow[d, mapsto] \\
F(\phi) \arrow[r, mapsto] & GF(\phi) \circ \eta_X = \eta_{X'} \circ \phi \\
\mathrm{id}_{F(X')} \arrow[r, mapsto] \arrow[u, mapsto] & \eta_{X'} \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

De modo similar, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(X)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f\circ -"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, GF(X)) \arrow[d, "G(f)\circ -"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \arrow[r, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{F(X)} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \eta_X \arrow[d, mapsto] \\
f \arrow[r, mapsto] & G(f) \circ \eta_X
\end{tikzcd}$$

Entonces $F(X) \xrightarrow{f} Y$ corresponde a $G(f) \circ \eta_X$. La verificación que ϵ es una transformación natural $F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{D}}$ y que $X \xrightarrow{g} G(Y)$ corresponde a $\epsilon_Y \circ F(g)$ es similar. ∎

Nuestra introducción minimalista y pragmática a las categorías se termina aquí. A partir de ahora vamos a estudiar categorías con estructuras adicionales, en particular objetos cero y estrucura aditiva (cuando los $\mathrm{Hom}(X,Y)$ son grupos abelianos).

10. Categorías con objeto cero

10.1. Definición. Se dice que 0 es un **objero cero** de una categoría si para cada objeto M existe un morfismo único $0 \to M$ y $M \to 0$.

10.2. Observación. *Supongamos que un objeto cero 0 existe.*

1) *Entre cada par de objetos M y N existe un morfismo único 0_{MN} (**morfismo cero**) que se factoriza a través de 0:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "0_{MN}"] \arrow[dr, "\exists!"'] & & N \\ & 0 \arrow[ur, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

2) *Tenemos*

$$(L \xrightarrow{0_{LM}} M \xrightarrow{f} N) = (L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{0_{MN}} N) = 0_{LN}$$

y en particular, $0_{MN} \circ 0_{LM} = 0_{MN}$:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr] \arrow[dr, "\exists!"'] & & M \arrow[rr] \arrow[dr, "\exists!"] & & N \\ & 0 \arrow[ur, "\exists!"] \arrow[rr, "\exists!", "=\mathrm{id}_0"'] & & 0 \arrow[ur, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

3) *Un objeto cero es único salvo isomorfismo.*

Demostración. 1) y 2) están claros. Para 3) notemos que si 0 y $0'$ son dos objetos ceros, entonces existen morfismos únicos $0 \to 0'$ y $0' \to 0$. Pero sus composiciones $0 \to 0' \to 0$ y $0' \to 0 \to 0'$ deben ser id_0 y $\mathrm{id}_{0'}$. ∎

10.3. Ejemplo. En la categoría R-**Mód** un módulo cero 0 es objeto cero en el sentido de arriba. En teoría, cada módulo cero puede tener cualquier conjunto subyacente $\{*\}$, pero todos son obviamente isomorfos. Por eso solemos decir "*el* modulo cero", y "*el* objeto cero" en general. El morfismo cero $0_{MN}\colon M \to N$ es el morfismo que aplica cada elemento $x \in M$ a $0 \in N$. ▲

10.4. Ejemplo. En la categoría de grupos **Grp** el grupo trivial $\{e\}$ es un objeto cero. ▲

10.5. Ejemplo. En la categoría de conjuntos **Set** no hay objeto cero. Específicamente, se ve que si I es un conjunto tal que para cualquier otro conjunto X tenemos una sola aplicación $I \to X$, entonces $I = \emptyset$. Si T es un conjunto tal que para cualquier otro conjunto X tenemos una sola aplicación $X \to T$, entonces $T = \{*\}$ es algún conjunto compuesto de un elemento. ▲

10.6. Ejercicio.

1) *Si m es un monomorfismo y $m \circ f = 0$ para algún f, entonces $f = 0$.*

2) *Si e es un epimorphismo y $g \circ e = 0$ para algún g, entonces $g = 0$.*

11. Núcleos y conúcleos

En una categoría con objeto cero, tiene sentido la noción de núcleos y conúcleos:

11.1. Definición. En cualquier categoría con objeto cero, sea $f\colon M \to N$ un morfismo. Entonces su **núcleo** es un objeto $\ker f$ junto con morfismo $\ker f \to M$ que tiene la siguiente propiedad universal: la composición $\ker f \to M \xrightarrow{f} N$ es el morfismo cero, y si $k\colon L \to M$ es otro morfismo tal que $f \circ k = 0$, entonces k se factoriza de modo único por $\ker f \to M$:

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "0"] & M \arrow[r, "f"] & N \\
L \arrow[u, dashed, "\exists!"] \arrow[ur] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

El **conúcleo** de f es un objeto $\operatorname{coker} f$ junto con morfismo $N \to \operatorname{coker} f$ que tiene la siguiente propiedad universal: la composición $M \xrightarrow{f} N \to \operatorname{coker} f$ es cero, y si $k\colon N \to L$ es otro morfismo tal que $k \circ f = 0$, entonces k se factoriza de modo único por $N \to \operatorname{coker} f$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[drr, "0"'] & N \arrow[r] \arrow[dr] & \operatorname{coker} f \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\
& & L
\end{tikzcd}$$

11.2. Ejemplo. Si $f\colon M \to N$ un morfismo de R-módulos, entonces se ve que el núcleo está definido por

$$\ker f = \{x \in M \mid f(x) = 0\},$$

y el morfismo $\ker f \to M$ es la inclusión. El conúcleo está definido por

$$\operatorname{coker} f = N / \operatorname{im} f,$$

donde $\operatorname{im} f$ es la **imagen**, que es el submódulo de N definido por

$$\operatorname{im} f = \{f(x) \mid x \in M\}.$$

El morfismo $N \to \operatorname{coker} f$ es la proyección. ▲

11.3. Observación.

1) *Si* $\ker(M \xrightarrow{f} N)$ *existe, entonces el morfismo* $\ker f \to M$ *es mono y el objeto* $\ker f$ *es único salvo isomorfismo.*

2) *Si* $\operatorname{coker}(M \xrightarrow{f} N)$ *existe, entonces el morfismo* $N \to \operatorname{coker} f$ *es epi y el objeto* $\operatorname{coker} f$ *es único salvo isomorfismo.*

Demostración. Para el lector que no había sufrido antes argumentos categóricos, voy a demostrar la parte sobre $\ker f$ y dejo la parte sobre $\operatorname{coker} f$ como un ejercicio (invirtiendo las flechas).

Sean $L \xrightarrow{g,g'} \ker f$ dos flechas tales que $k \circ g = k \circ g'$. En particular, $f \circ k \circ g = f \circ k \circ g' = 0$, y por la propiedad universal del núcleo, debe existir un morfismo único $L \xrightarrow{h} \ker f$ tales que $k \circ g = k \circ g' = k \circ h$. Entonces $h = g = g'$.

$$L \underset{g'}{\overset{g}{\rightrightarrows}} \ker f \xrightarrow{k} M \xrightarrow{f} N$$

Ahora sean K y K' dos objetos con morfismos $K \xrightarrow{k} M$ y $K' \xrightarrow{k'} M$ que satisfacen la propiedad universal del núcleo. Entonces existen morfismos únicos $K' \xrightarrow{i} K$ y $K \xrightarrow{j} K'$ tal que $k \circ i = k'$ y $k' \circ j = k$. Tenemos $k \circ i \circ j = k \circ \mathrm{id}_K$, pero k es un monomorfismo, y por lo tanto $i \circ j = \mathrm{id}_K$. De modo similar, $k' \circ j \circ i = k' \circ \mathrm{id}_{K'}$ y $j \circ i = \mathrm{id}_{K'}$. Las flechas i y j definen un isomorfismo $K \cong K'$. ■

Aquí están algunas propiedades inmediatas:

11.4. Ejercicio.

1) Si $m\colon M \rightarrowtail N$ es un monomorfismo, entonces su núcleo es el morfismo cero $0 \to M$.

2) Si $e\colon M \twoheadrightarrow N$ es un epimorfismo, entonces su conúcleo es el morfismo cero $N \to 0$.

3) Para el morfismo cero $0_{MN}\colon M \to N$ el morfismo $\ker(0_{MN}) \to M$ debe ser (salvo isomorfismo) el morfismo identidad $\mathrm{id}_M\colon M \to M$.

4) Para el morfismo cero $0_{MN}\colon M \to N$ el morfismo $N \to \operatorname{coker}(0_{MN})$ debe ser (salvo isomorfismo) el morfismo identidad $\mathrm{id}_N\colon N \to N$.