Álgebra homológica, día 5

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

12 de agosto de 2016

1. Categorías abelianas: imagenes y coimagenes

1.1. Definición. Sea **A** una categoría aditiva. Supongamos que para cada morfismo $f\colon M \to N$ existen su núcleo $\ker f \rightarrowtail M$ y conúcleo $N \twoheadrightarrow \operatorname{coker} f$. Entonces definimos la **imagen** y **coimagen** de f como

$$\begin{aligned} \operatorname{im} f &:= \ker(N \twoheadrightarrow \operatorname{coker} f), \\ \operatorname{coim} f &:= \operatorname{coker}(\ker f \rightarrowtail M). \end{aligned}$$

1.2. Observación. *Sea* **A** *una categoría aditiva con núcleos y conúcleos. Entonces para cada morfismo* $f\colon M \to N$ *existe un único morfismo* $\overline{f}\colon \operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ *tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, tail, "i"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "q"'] & N \arrow[r, two heads, "p"] & \operatorname{coker} f \\
& \operatorname{coim} f \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & \operatorname{im} f \arrow[u, tail, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Antes de todo, tal $\overline{f}$ es único porque q es epi y j es mono. Para construir $\overline{f}$, notamos que $f \circ i = 0$; entonces por la propiedad universal de $\operatorname{coker}(\ker f \to M) =: \operatorname{coim} f$ existe un único morfismo $\operatorname{coim} f \xrightarrow{g} N$ tal que $g \circ q = f$. Luego $p \circ f = p \circ g \circ q = 0$. El morfismo q es epi, por lo que $p \circ g = 0$. Por la propiedad universal de $\ker(N \to \operatorname{coker} f) =: \operatorname{im} f$, existe un único morfismo $\overline{f}$ tal que $j \circ \overline{f} = g$.

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, tail, "i"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "q"'] & N \arrow[r, two heads, "p"] & \operatorname{coker} f \\
& \operatorname{coim} f \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] \arrow[ur, dashed, "g"] & \operatorname{im} f \arrow[u, tail, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

■

Por fin estamos listos para definir las categorías abelianas:

1.3. Definición. Una categoría **A** es **abeliana** si

1) **A** es aditiva (tiene objeto cero, adición de morfismos, (bi)productos);

2) para cada morfismo $f\colon M \to N$ existen su núcleo $\ker f \rightarrowtail M$ y conúcleo $N \twoheadrightarrow \operatorname{coker} f$;

3) para cada morfismo $f\colon M \to N$ el morfismo canónico $\overline{f}\colon \operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ es un isomorfismo.

La condición 3) parece un poco rara, pero quiere decir lo siguiente. Supongamos que $m\colon M \rightarrowtail N$ es un monomorfismo. Entonces se ve que la condición 3) impone que m, salvo isomorfismo, debe ser el núcleo del morfismo $N \twoheadrightarrow \operatorname{coker} m$:

$$m \cong \ker(N \twoheadrightarrow \operatorname{coker} m).$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\cong"'] & N \arrow[r, two heads, "p"] & \operatorname{coker} m \\
 & M \arrow[r, "\overline{f}", "\cong"'] & \operatorname{im} f \arrow[u, tail, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

De modo similar, si $e\colon M \twoheadrightarrow N$ es un epimorfismo, la condición 3) nos dice que

$$e \cong \operatorname{coker}(\ker e \rightarrowtail N).$$

Entonces la condición 3) básicamente significa que

3*) cada monomorfismo en $\mathbf{A}$ es un núcleo y cada epimorfismo es un conúcleo.

La condición 3*) implica que en las categorías abelianas

$$\text{isomorfismo} = \text{epimorfismo} + \text{monomorfismo}$$

En general tenemos solo la implicación "$\Rightarrow$", mientras que la implicación "$\Leftarrow$", tal y como hemos mencionado, es falsa en muchas categorías. Sin embargo, en las categorías abelianas, si f es mono, entonces $f = \ker g$ para algún morfismo g, en particular $g \circ f = 0$. Pero si f es también epi, esto implica $g = 0$. Y como el núcleo del morfismo cero, f debe ser un isomorfismo.

De hecho, 3*) es equivalente a 3), pero la demostración es un poco tediosa; véase por ejemplo [Borceux, vol. II, Theorem 1.5.5].

1.4. Ejemplo. En la categoría de grupos **Grp** (no necesariamente abelianos) se ve fácilmente que el núcleo de un homomorfismo de grupos $f\colon G \to H$ es (isomorfo a) $\{x \in G \mid f(x) = 1\}$. Además, es fácil observar que los monomorfismos son inclusiones de subgrupos $H \subset G$. Como sabemos, los núcleos de morfismos $f\colon G \to H$ corresponden a los subgrupos normales de G. Entonces, si $H \subset G$ es un subgrupo que no es normal, la inclusión $H \rightarrowtail G$ es un monomorfismo que no es un núcleo. Es otra razón por qué **Grp** no es abeliana, pero, como hemos notado en la última lección, ni siquiera es aditiva. ▲

1.5. Ejemplo. Existen categorías que son aditivas pero no son abelianas. Por ejemplo, en la categoría de R-módulos libres los conúcleos no existen porque el cociente de dos módulos libres M/N no es libre en general (ni siquiera sobre buenos anillos como $\mathbb{Z}$ y módulos finitamente generados). Sin embargo, si $R = \mathbb{K}$ es un cuerpo, entonces tenemos la categoría de espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ que es abeliana (cada módulo sobre un cuerpo es automáticamente libre). ▲

1.6. Ejemplo. Hemos observado que la categoría de R-módulos es aditiva, y para cada morfismo existen su núcleo y conúcleo. Cada morfismo $f\colon M \to N$ se factoriza por su imagen $\operatorname{im} f \subset N$:

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, tail] & M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads] & & N \arrow[r, two heads] & \operatorname{coker} f \\
& & \operatorname{im} f \arrow[ur, tail] & &
\end{tikzcd}$$

Y por el **teorema del isomorfismo**

$$\operatorname{im} f \cong \ker(N \twoheadrightarrow \operatorname{coker} f) \cong \operatorname{coker}(\ker f \rightarrowtail M) \cong M/\ker f.$$

▲

Cuando todos los núcleos y conúcleos existen, son funtoriales:

1.7. Observación. *Supongamos que tenemos el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f"'] & N' \arrow[d, "h"] \\
M \arrow[r, "d"'] & N
\end{tikzcd}$$

Entonces

1) f *induce un único morfismo* $\ker d' \to \ker d$ *tal que el diagrama correspondiente es conmutativo;*

2) h *induce un único morfismo* $\operatorname{coker} d' \to \operatorname{coker} d$ *tal que el diagrama correspondiente es conmutativo.*

$$\begin{tikzcd}
\ker d' \arrow[r, tail, "i'"] \arrow[d, dashed] & M' \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f"'] & N' \arrow[r, two heads, "p'"] \arrow[d, "h"] & \operatorname{coker} d' \arrow[d, dashed] \\
\ker d \arrow[r, tail, "i"'] & M \arrow[r, "d"'] & N \arrow[r, two heads, "p"'] & \operatorname{coker} d
\end{tikzcd}$$

Demostración. Tenemos

$$d \circ f \circ i' = h \circ \underbrace{d' \circ i'}_{0} = 0,$$

y entonces por la propiedad universal del núcleo el morfismo $f \circ i'$ se factoriza de modo único por $\ker d$. Para $\operatorname{coker} d' \to \operatorname{coker} d$ usamos la propiedad universal del conúcleo. ■

El hecho de que cada morfismo de R-módulos $f\colon M \to N$ se factoriza de modo único (salvo isomorfismo) en la composición de un epimorfismo $M \twoheadrightarrow \operatorname{im} f$ y monomorfismo $\operatorname{im} f \rightarrowtail N$ se generaliza a cualquier categoría abeliana:

1.8. Observación (factorización epi-mono). *Sea* $f\colon M \to N$ *un morfismo en una categoría abeliana. Entonces* f *se factoriza de modo único como una composición de un epimorfismo seguido de un monomorfismo.*

Demostración. Ya hemos observado en 1.2 que tal factorización existe: es dada por

$$M \twoheadrightarrow \operatorname{coim} f \cong \operatorname{im} f \rightarrowtail N;$$

tenemos que demostrar que es única. Supongamos que existe otra factorización $M \twoheadrightarrow I \rightarrowtail N$. Tenemos $p \circ j' \circ q' = p \circ f = 0$, pero q' es epi, entonces $p \circ j' = 0$. Entonces existe un único morfismo $j'' \colon I \to \operatorname{im} f$ tal que $j' = j \circ j''$, y j'' es mono porque j' es mono. De la misma manera, existe un único morfismo $q'' \colon \operatorname{coim} f \to I$ tal que $q'' \circ q = q'$, y q'' es epi.

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, tail, "i"] & M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q'"] \arrow[dd, two heads, "q"'] & & N \arrow[r, two heads, "p"] & \operatorname{coker} f \\
& & I \arrow[ur, tail, "j'"] \arrow[dr, tail, dashed, "j''"] & & \\
& \operatorname{coim} f \arrow[rr, "\overline{f}", "\cong"'] \arrow[ur, two heads, dashed, "q''"] & & \operatorname{im} f \arrow[uu, tail, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego $j \circ j'' \circ q'' \circ q = j' \circ q' = f$, entonces $j'' \circ q'' = \overline{f}$ porque $\overline{f}$ está definido de manera única (1.2). Pero $\overline{f}$ es un isomorfismo, por tanto epi y mono, y esto quiere decir que q'' es también mono y j'' es también epi. Concluimos que q'' y j'' son isomorfismos, porque son epi y mono al mismo tiempo. ■

1.9. Ejercicio. *Observe que las nociones de núcleo y conúcleo son duales: las definiciones son las mismas, solo que las flechas van en la dirección opuesta. Entonces los núcleos en una categoría abeliana* $\mathbf{A}$ *corresponden a los conúcleos en* $\mathbf{A}^\circ$*. La categoría* $\mathbf{A}$ *es abeliana si y solamente si* $\mathbf{A}^\circ$ *es abeliana.*

Un poco de la historia. El álgebra homológica fue sistemáticamente desarollada por Henri Cartan y Samuel Eilenberg en el libro "Homological algebra" que fue publicado en 1953 pero había sido escrito mucho tiempo antes, con resultados solamente para R-módulos. En los años 50 los matemáticos se dieron cuenta de que una teoría similar podía ser desarollada para **haces** de R-módulos y otros contextos. David Buchsbaum, un estudiante de Eilenberg, descubrió en su tesis "Exact Categories and Duality" (1954) una lista de axiomas abstractos que eran suficientes para el álgebra homológica. En 1957 Alexander Grothendieck publicó en la revista matemática de la Universidad de Tohoku (Japón) su famoso artículo "Sur quelques points d'algèbre homologique", que hoy en día se conoce como "el artículo de Tohoku". Grothendieck demostró que era posible de aplicar las mismas construcciones a los haces y otras situaciones y dio una lista de axiomas (similar a la de Buchsbaum) bajo el término "categoría abeliana". En particular, Grothendieck demostró que los haces también formaban una categoría abeliana. Por cierto, Cartan y Eilenberg, como geómetras, ya sabían que la cohomología de haces tenía que ser otro caso particular de cierta teoría general, pero no sabían resolver algunos problemas técnicos (existencia de suficientes objetos inyectivos en la categoría de haces de R-módulos).

17. Sucesiones exactas

17.1. Definición. Consideremos una sucesión de morfismos en una categoría abeliana (por ejemplo, una sucesión de morfismos de R-módulos)

$$(M^\bullet, f^\bullet)\colon \; \cdots \to M^{n-1} \xrightarrow{f^{n-1}} M^n \xrightarrow{f^n} M^{n+1} \to \cdots$$

Supongamos que $f^n \circ f^{n-1} = 0$. Entonces la composición $\operatorname{im} f^{n-1} \rightarrowtail M^n \xrightarrow{f^n} M^{n+1}$ es también cero y $\operatorname{im} f^{n-1} \rightarrowtail M^n$ se factoriza por $\ker f^n$. De la misma manera, $M^n \twoheadrightarrow \operatorname{im} f^n$ se factoriza por $\operatorname{coker} f^n$:

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{im} f^{n-1} \arrow[rr, tail, dashed, "\exists!"] \arrow[dr, tail] & & \ker f^n \arrow[dl, tail] & \\
M^{n-1} \arrow[ur, two heads] \arrow[rr, "f^{n-1}"] & & M^n \arrow[rr, "f^n"] \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & & M^{n+1} \\
& \operatorname{coker} f^{n-1} \arrow[rr, two heads, dashed, "\exists!"] & & \operatorname{im} f^n \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}$$

Se dice que la sucesión es **exacta en** M^n si se cumple una de las siguientes propiedades (ejercicio: son equivalentes):

1) la composición $\ker f^n \rightarrowtail M^n \twoheadrightarrow \operatorname{coker} f^{n-1}$ es cero,

2) $\operatorname{im} f^{n-1} \rightarrowtail \ker f^n$ es un isomorfismo,

3) $\operatorname{coker} f^{n-1} \twoheadrightarrow \operatorname{im} f^n$ es un isomorfismo.

Si la sucesión es exacta en M^n para cada n, se dice simplemente que $(M^\bullet, f^\bullet)$ es una **sucesión exacta**.

17.2. Ejemplo. En el caso de R-módulos $\operatorname{im} f^{n-1}$ y $\ker f^n$ se identifican con submódulos de M^n y la sucesión $M^{n-1} \xrightarrow{f^{n-1}} M^n \xrightarrow{f^n} M_{n+1}$ es exacta si y solamente si $\operatorname{im} f^{n-1} = \ker f^n$ (esto implica en particular $f^n \circ f^{n-1} = 0$, es decir $\operatorname{im} f^{n-1} \subseteq \ker f^n$). ▲

17.3. Ejemplo. Todo morfismo $f\colon M \to N$ forma parte de la sucesión exacta

$$0 \to \ker f \to M \xrightarrow{f} N \to \operatorname{coker} f \to 0$$

▲

17.4. Ejemplo. Una sucesión exacta de la forma

$$0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \to 0$$

se llama una **sucesión exacta corta** y va a tener un rol fundamental en nuestro curso. En la categoría R-**Mód** esto significa que L puede ser visto como un submódulo de M y que p induce un isomorfismo $N \cong M/L$. ▲

17.5. Ejercicio. *1)* $0 \to M \xrightarrow{f} N$ *es exacta si y solamente si* f *es un monomorfismo.*

2) $M \xrightarrow{f} N \to 0$ *es exacta si y solamente si* f *es un epimorfismo.*

3) $0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{g} N$ *es exacta si y solamente si* $i = \ker g$.

4) $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{p} N \to 0$ *es exacta si y solamente si* $p = \operatorname{coker} f$.

19. Funtores exactos

19.1. Definición. Sea $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor aditivo entre dos categorías abelianas. Consideremos una sucesión exacta corta en $\mathbf{A}$:

(*) $$0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \to 0$$

1) Se dice que F es **exacto por la izquierda** si para cada sucesión exacta corta (*) la sucesión correspondiente en $\mathbf{B}$
$$0 \to F(L) \xrightarrow{i_*} F(M) \xrightarrow{p_*} F(N)$$
es también exacta.

2) Se dice que F es **exacto por la derecha** si para cada sucesión exacta corta (*) la sucesión correspondiente en $\mathbf{B}$
$$F(L) \xrightarrow{i_*} F(M) \xrightarrow{p_*} F(N) \to 0$$
es también exacta.

3) Se dice que F es **exacto** si es exacto por la derecha y por la izquierda. Es decir, si F preserva la exactitud de cada sucesión (*):
$$0 \to F(L) \xrightarrow{i_*} F(M) \xrightarrow{p_*} F(N) \to 0$$
es también exacta.

A veces se usa otra definición un poco diferente, pero equivalente:

19.2. Ejercicio. *Sea $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor aditivo entre categorías abelianas.*

1) *F es exacto por la izquierda si y solamente si para cada sucesión exacta*
$$0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N$$
la sucesión correspondiente
$$0 \to F(L) \xrightarrow{i_*} F(M) \xrightarrow{f_*} F(N)$$
es también exacta. Esto es equivalente a la preservación del núcleo de todo morfismo $f\colon M \to N$:
$$\ker(F(M) \xrightarrow{f_*} F(N)) = F(\ker(M \xrightarrow{f} N)).$$

2) *F es exacto por la derecha si para cada sucesión exacta*
$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{p} N \to 0$$
la sucesión correspondiente
$$F(L) \xrightarrow{f_*} F(M) \xrightarrow{p_*} F(N) \to 0$$
es también exacta. Esto es equivalente a la preservación del conúcleo de todo morfismo $f\colon L \to M$:
$$\operatorname{coker}(F(L) \xrightarrow{f_*} F(M)) = F(\operatorname{coker}(L \xrightarrow{f} M)).$$

Cuando F es un funtor contravariante $\mathbf{A}^\circ \to \mathbf{B}$, la noción de exactitud F es la misma, solo que hay que tener en cuenta que en la categoría $\mathbf{A}^\circ$ los morfismos van en la dirección opuesta:

- F es exacto por la izquierda si

$$0 \to L \to M \to N \to 0 \text{ exacta} \quad \Rightarrow \quad 0 \to F(N) \to F(M) \to F(L) \text{ exacta;}$$

- F es exacto por la derecha si

$$0 \to L \to M \to N \to 0 \text{ exacta} \quad \Rightarrow \quad F(N) \to F(M) \to F(L) \to 0 \text{ exacta;}$$

- F es exacto si

$$0 \to L \to M \to N \to 0 \text{ exacta} \quad \Rightarrow \quad 0 \to F(N) \to F(M) \to F(L) \to 0 \text{ exacta.}$$

19.3. Ejemplo. El funtor olvidadizo R-**Mód** $\to$ **Ab** (que olvida la acción de R sobre M y trata a M solo como un grupo abeliano) es exacto, porque la definición del núcleo y conúcleo no tiene nada que ver con la acción de R, sino con la estructura de grupo abeliano. ▲

Aquí hay un ejemplo fundamental de funtor exacto:

19.4. Ejercicio.

1) *El funtor* $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(K,-)\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Ab}$ *es exacto por la izquierda, es decir, para cada sucesión exacta corta en* $\mathbf{A}$

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

la sucesión correspondiente de grupos abelianos

$$0 \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(K,L) \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(K,M) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(K,N)$$

es también exacta.

2) *El funtor (contravariante)* $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(-,K)\colon \mathbf{A}^\circ \to \mathbf{Ab}$ *es también exacto por la izquierda, es decir, para cada sucesión exacta corta en* $\mathbf{A}$

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

la sucesión correspondiente de grupos abelianos

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(N,K) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,K) \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(L,K) \to 0$$

es también exacta.

19.5. Ejemplo. En general, el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M,-)$ (resp. $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(-,N)$) es exacto por la izquierda y no es exacto por la derecha.

Para $n \ge 2$ consideremos una sucesión exacta corta de grupos abelianos ($\mathbb{Z}$-módulos)

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

Apliquemos el funtor $\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},-)$:

$$0 \to \underline{\operatorname{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \to \underline{\operatorname{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \to \underline{\operatorname{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

El grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es de torsión y el grupo $\mathbb{Z}$ es libre de torsión; por lo tanto el único morfismo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es 0 y $\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$. Sin embargo, $\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (en general, $\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(n,m)\mathbb{Z}$ donde (m,n) es el máximo común divisor de m y n). Entonces el epimorfismo $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ deja de ser epimorfismo después de aplicación de $\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, -)$.

Si a la misma sucesión exacta corta apliquemos $\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$, tenemos la sucesión

$$0 \to \underbrace{\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})}_{0} \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z}$$

donde el último morfismo no es epi. ▲

Sin embargo, si en los funtores $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(K, -)$ y $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(-, K)$ podemos variar el objeto K, entonces tenemos

19.6. Observación. *Consideremos una sucesión de morfismos en* $\mathbf{A}$

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

1) *La sucesión es exacta en M si para <u>cada objeto</u> K la sucesión correspondiente*

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(K, L) \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(K, M) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(K, N)$$

es exacta en $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(K, M)$.

2) *La sucesión es exacta en M si para cada objeto K la sucesión correspondiente*

$$0 \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(N, K) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M, K) \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(L, K)$$

es exacta en $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M, K)$.

Demostración. Demostremos la parte covariante. Consideremos $K = L$. Tenemos la sucesión exacta

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(L, L) \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(L, M) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(L, N)$$

En particular, $g \circ f = (g \circ f)_*(\mathrm{id}_L) = g_* \circ f_*(\mathrm{id}_L) = 0$, entonces $\operatorname{im} f \subseteq \ker g$.

Luego consideremos $K = \ker g$. Tenemos la sucesión exacta

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(\ker g, L) \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(\ker g, M) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(\ker g, N)$$

En particular, para el morfismo canónico $i\colon \ker g \to M$ tenemos $g_*(i) = g \circ i = 0$ y por lo tanto $i = f_*(\phi) = f \circ \phi$ para algún morfismo $\phi\colon \ker g \to L$. Entonces $\ker g = \operatorname{im} i \subseteq \operatorname{im} f$. ■

19.7. Corolario. 1) *Una sucesión*

$$0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{g} N$$

es exacta si y solamente si la sucesión

$$0 \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(K, L) \xrightarrow{i_*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(K, M) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(K, N)$$

es exacta para cada K.

2) *Una sucesión*

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{p} N \to 0$$

es exacta si y solamente si la sucesión

$$0 \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(N, K) \xrightarrow{p^*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M, K) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(L, K)$$

es exacta para cada K.

20. Funtores adjuntos y exactitud

Recordemos que tenemos funtores aditivos

$$\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,-)\colon R\text{-}\mathbf{Mód} \to R\text{-}\mathbf{Mód} \quad \text{y} \quad \underline{\mathrm{Hom}}_R(-,N)\colon R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ \to R\text{-}\mathbf{Mód},$$

exactos por la izquierda, pero en general no exactos por la derecha. $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,-)$ es adjunto por la derecha a $-\otimes_R M$:

$$\mathrm{Hom}_R(L\otimes_R M, N) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_R(L, \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)).$$

Resulta que $-\otimes_R M$ es también exacto por la derecha, y esto no es una coincidencia:

20.1. Observación (Adjunto por la izquierda es exacto por la derecha; adjunto por la derecha es exacto por la izquierda). *Supongamos que tenemos una adjunción entre dos funtores $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $G\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ entre categorías abelianas $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(M),K) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M,G(K)).$$

(Como ya sabemos, F y G son automáticamente aditivos y la biyección de arriba es un isomorfismo de grupos abelianos.) Entonces F es exacto por la derecha y G es exacto por la izquierda.

Demostración. Por ejemplo, veamos por qué F es exacto por la derecha. Si tenemos una sucesión exacta

$$(*) \qquad L \to M \to N \to 0$$

tenemos que ver que la sucesión correspondiente

$$F(L) \to F(M) \to F(N) \to 0$$

es también exacta. Pero, como hemos observado en 19.7, esto es equivalente al hecho que para cada $K \in \mathbf{B}$ la sucesión

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(N),K) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(M),K) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(L),K)$$

es exacta. Ahora la adjunción entre F y G dice que hay un diagrama conmutativo de grupos abelianos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(N),K) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(M),K) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(L),K) \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(N,G(K)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M,G(K)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(L,G(K))
\end{tikzcd}$$

—aquí los cuadrados son conmutativos porque las biyecciones $\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(-),K) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-,G(K))$ son naturales. La segunda fila es exacta porque la sucesión (*) es exacta y el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-,G(K))$ es exacto por la izquierda. Entonces la primera fila es también exacta. ■

En particular, tenemos

20.2. Corolario. *El funtor $-\otimes_R M\colon R$-**Mód** $\to R$-**Mód** es exacto por la derecha.*
En particular, si $N' \subset N$ es un submódulo, entonces

$$(N/N')\otimes_R M \cong \frac{N\otimes_R M}{\mathrm{im}(N'\otimes_R M \to N\otimes_R M)}.$$

Si R es un anillo y $I \subset R$ un ideal, entonces

$$M\otimes_R (R/I) \cong M/IM.$$

Demostración. Porque $- \otimes_R M$ es adjunto por la izquierda a $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, -)$. ∎

20.3. Ejercicio. *Demuestre directamente que $- \otimes_R M$ es exacto por la derecha sin usar el argumento con adjunciones: si tenemos una sucesión exacta*

$$N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{p} N'' \to 0$$

entonces la sucesión

$$N' \otimes_R M \xrightarrow{f_*} N \otimes_R M \xrightarrow{p_*} N'' \otimes_R M \to 0$$

es también exacta.

20.4. Ejemplo. En general, un monomorfismo $N' \rightarrowtail N$ no siempre induce un monomorfismo $N' \otimes_R M \to N \otimes_R M$. Por ejemplo, consideremos nuestra sucesión exacta preferida

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

Si aplicamos $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, entonces la multiplicación por n induce el morfismo trivial $0\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. ▲

Entonces $- \otimes_R M$ en general no es exacto por la izquierda. Los R-módulos M tales que $- \otimes_R M$ es exacto se llaman **módulos planos**.

20.5. Ejemplo. Un ejemplo importante del álgebra conmutativa: cada localización $S^{-1}R$ respecto a un subconjunto $S \subset R$ es un R-módulo plano. En particular, para $R = \mathbb{Z}$ el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}$ es plano. ▲

Gracias al isomorfismo natural $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$, el funtor $M \otimes_R -\colon R\text{-}\mathbf{Mód} \to R\text{-}\mathbf{Mód}$ es también exacto por la derecha porque es también adjunto por la izquierda a $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, -)$.

La adjunción entre $\underline{\mathrm{Hom}}_R(-, N)$ y sí mismo

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ}(\underline{\mathrm{Hom}}_R(L, N), M) \cong \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mód}}(L, \underline{\mathrm{Hom}}_R(M, N))$$

nos dice que $\underline{\mathrm{Hom}}_R(-, N)\colon R\text{-}\mathbf{Mód} \to R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ$ es exacto por la derecha y $\underline{\mathrm{Hom}}_R(-, N)\colon R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ \to R\text{-}\mathbf{Mód}$ es exacto por la izquierda. Es un poco confuso, pero ser exacto por la izquierda sobre la categoría opuesta $R\text{-}\mathbf{Mód}^\circ$ es la misma cosa que ser exacto por la derecha sobre $R\text{-}\mathbf{Mód}$.