Álgebra homológica, día 6

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

15 de agosto de 2016

1. Funtores derivados como δ-funtores universales

Hasta este punto hemos estudiado sucesiones exactas en categorías abelianas y funtores exactos. Las sucesiones exactas permiten de construir objetos a partir de objetos más sencillos. Por ejemplo, una sucesión exacta corta en una categoría abeliana $\mathbf{A}$

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$

es en cierto sentido una decomposición del objeto M en objetos K y N. Si F es un funtor aditivo exacto $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, la sucesión exacta de arriba induce otra sucesión exacta en $\mathbf{B}$

$$0 \to F(K) \to F(M) \to F(N) \to 0$$

y entonces el objeto $F(M)$ consiste de $F(K)$ y $F(N)$. Todo se vuelve más complicado (y más interesante) cuando F no es exacto. Si F es exacto por la derecha pero no es exacto por la izquierda, tenemos una sucesión exacta

$$??? \to F(K) \to F(M) \to F(N) \to 0$$

dónde el morfismo $F(K) \to F(M)$ no es necesariamente mono. Afortunadamente, bajo ciertas hipótesis, existe un modo natural y universal de continuar la sucesión exacta de arriba: vamos a tener una sucesión exacta larga en $\mathbf{B}$

$$\cdots \to L_2F(K) \to L_2F(M) \to L_2F(N) \xrightarrow{\delta_2} L_1F(K) \to L_1F(M) \to L_1F(N) \xrightarrow{\delta_1} F(K) \to F(M) \to F(N) \to 0$$

Aquí los $L_nF\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ son los **funtores derivados por la izquierda** de F. En particular, para $n = 0$ tenemos $L_0F \cong F$. Los morfismos en la última sucesión exacta están inducidos por los morfismos de la sucesión $K \to M \to N$, y los $\delta_n\colon L_nF(N) \to L_{n-1}F(K)$ son ciertos morfismos especiales llamados **morfismos de conexión**.

De la misma manera, si $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un funtor aditivo exacto por la derecha, entonces cada sucesión exacta en $\mathbf{A}$ produce una sucesión exacta en $\mathbf{B}$

$$0 \to F(K) \to F(M) \to F(N) \xrightarrow{\delta^0} R^1F(K) \to R^1F(M) \to R^1F(N) \xrightarrow{\delta^1} R^2F(K) \to R^2F(M) \to R^2F(N) \to \cdots$$

Aquí los $R^nF\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ son los **funtores derivados por la derecha** del funtor F. En particular, para $n = 0$ tenemos $R^0F \cong F$.

Sobre la categoría R-**Mód**, para cada funtor exacto por la derecha (por ejemplo $- \otimes_R M$) existen funtores derivados por la izquierda L_nF y para cada funtor exacto por la izquierda F (por ejemplo $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, -)$) existen funtores derivados por la derecha R^nF. Antes de desarrollar el cálculo de funtores derivados, demos las definiciones generales.

1.1. Definición. Un **δ-funtor izquierdo** (o **homológico**) (T_n, δ_n) consiste en los siguientes datos.

- Una colección de funtores aditivos $T_n\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$
- Morfismos $\delta_n\colon T_n(N) \to T_{n-1}(K)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ y para cada sucesión exacta corta en $\mathbf{A}$

(*) $$0 \to K \to M \to N \to 0$$

Y se piden las siguientes propiedades:

- Cada sucesión exacta corta (*) induce una sucesión exacta larga en $\mathbf{B}$

$$\cdots \to T_2(K) \to T_2(M) \to T_2(N) \xrightarrow{\delta_2} T_1(K) \to T_1(M) \to T_1(N) \xrightarrow{\delta_1} T_0(K) \to T_0(M) \to T_0(N) \to 0$$

- Las sucesiones exactas largas son naturales: cada diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induce un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\delta_2"] & T_1(K) \arrow[r] \arrow[d] & T_1(M) \arrow[r] \arrow[d] & T_1(N) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d] & T_0(K) \arrow[r] \arrow[d] & T_0(M) \arrow[r] \arrow[d] & T_0(N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "\delta_2"] & T_1(K') \arrow[r] & T_1(M') \arrow[r] & T_1(N') \arrow[r, "\delta_1"] & T_0(K') \arrow[r] & T_0(M') \arrow[r] & T_0(N') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

1.2. Definición. Sea $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor aditivo exacto por la derecha. Entonces sus **funtores derivados por la izquierda** forman un δ-funtor izquierdo (L_nF, δ_n) tal que $L_0F \cong F$ y que satisface la siguiente propiedad universal. Para cualquier otro δ-funtor izquierdo (T_n, ∂_n) una transformación natural $T_0 \Rightarrow L_0F$ se extiende de modo único a transformaciones naturales $T_n \Rightarrow L_nF$ para $n > 0$ que conmutan con los δ_n y ∂_n:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_2"] & T_1(K) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & T_1(M) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & T_1(N) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, dashed] & T_0(K) \arrow[r] \arrow[d] & T_0(M) \arrow[r] \arrow[d] & T_0(N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "\delta_2"] & L_1F(K) \arrow[r] & L_1F(M) \arrow[r] & L_1F(N) \arrow[r, "\delta_1"] & L_0F(K) \arrow[r] & L_0F(M) \arrow[r] & L_0F(N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

1.3. Observación. *Para cada funtor aditivo exacto por la derecha $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, si sus funtores derivados por la izquierda L_nF existen, son únicos salvo isomorfismo.*

Demostración. Si (L_n^1F, δ_n^1) y (L_n^2F, δ_n^2) son dos funtores derivados de F, tenemos transformaciones naturales únicas $L_n^1F \Rightarrow L_n^2F$ y $L_n^2F \Rightarrow L_n^1F$ y las composiciones $L_n^1F \Rightarrow L_n^2F \Rightarrow L_n^1F$ y $L_n^2F \Rightarrow L_n^2F \Rightarrow L_n^2F$ deben ser las transformaciones identidad. Entonces $L_n^1F \cong L_n^2F$. ■

Las definiciones para δ-funtores derechos son las mismas, solo que las flechas van en la otra dirección:

1.4. Definición. Un δ**-funtor derecho** (o **cohomológico**) (T^n, δ^n) consiste en los siguientes datos.

- Una colección de funtores aditivos $T^n\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$
- Morfismos $\delta^n\colon T^n(N) \to T^{n+1}(K)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ y para cada sucesión exacta corta en $\mathbf{A}$

(*) $$0 \to K \to M \to N \to 0$$

Y se piden las siguientes propiedades:

- Cada sucesión exacta corta (*) induce una sucesión exacta larga en $\mathbf{B}$

$$0 \to T^0(K) \to T^0(M) \to T^0(N) \xrightarrow{\delta^0} T^1(K) \to T^1(M) \to T^1(N) \xrightarrow{\delta^1} T^2(K) \to T^2(M) \to T^2(N) \to \cdots$$

- Las sucesiones exactas largas son naturales: cada diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induce un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T^0(K) \arrow[r] \arrow[d] & T^0(M) \arrow[r] \arrow[d] & T^0(N) \arrow[r, "\delta^0"] \arrow[d] & T^1(K) \arrow[r] \arrow[d] & T^1(M) \arrow[r] \arrow[d] & T^1(N) \arrow[r, "\delta^1"] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & T^0(K') \arrow[r] & T^0(M') \arrow[r] & T^0(N') \arrow[r, "\delta^0"] & T^1(K') \arrow[r] & T^1(M') \arrow[r] & T^1(N') \arrow[r, "\delta^1"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

1.5. Definición. Sea $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor aditivo exacto por la izquierda. Entonces sus **funtores derivados por la derecha** forman un δ-funtor derecho (R^nF, δ^n) tal que $R^0F \cong F$ y que satisface la siguiente propiedad universal. Para cualquier otro δ-funtor derecho (T^n, ∂^n) una transformación natural $R^0F \Rightarrow T^0$ se extiende de modo único a transformaciones naturales $R^nF \Rightarrow T^n$ para $n > 0$ que conmutan con los δ^n y ∂^n:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R^0F(K) \arrow[r] \arrow[d] & R^0F(M) \arrow[r] \arrow[d] & R^0F(N) \arrow[r, "\delta^0"] \arrow[d] & R^1F(K) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & R^1F(M) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & R^1F(N) \arrow[r, "\delta^1"] \arrow[d, dashed] & \cdots \\
0 \arrow[r] & T^0(K) \arrow[r] & T^0(M) \arrow[r] & T^0(N) \arrow[r, "\partial^0"] & T^1(K) \arrow[r] & T^1(M) \arrow[r] & T^1(N) \arrow[r, "\partial^1"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

1.6. Observación. *Para cada funtor exacto por la izquierda $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, si sus funtores derivados por la derecha R^nF existen, son únicos salvo isomorfismo.*

Las sucesiones exactas con L_nF y R^nF nos dan inmediatamente el siguiente resultado:

1.7. Observación. *Sea $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un funtor exacto por la derecha. Supongamos que sus funtores derivados L_nF existen. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) F es exacto.

2) $L_1 F = 0$.

3) $L_n F = 0$ para cada $n > 0$.

Sea $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un funtor exacto por la izquierda. Supongamos que sus funtores derivados $R^n F$ existen. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1) F es exacto.

2) $R^1 F = 0$.

3) $R^n F = 0$ para cada $n > 0$.

Demostración. Por ejemplo, en el caso de los funtores derivados por la izquierda, tenemos 2) $\Rightarrow$ 1): si $L_1 F = 0$, entonces cada sucesión exacta corta

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$

induce el siguiente diagrama con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & L_1F(N) \arrow[r, "\delta_1"] & L_0F(K) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & L_0F(M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & L_0F(N) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
& & F(K) \arrow[r] & F(M) \arrow[r] & F(N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

pero $L_1 F = 0$, y por lo tanto $F(K) \to F(M)$ es mono. Esto demuestra que F es también exacto por la izquierda.

Luego, tenemos la implicación trivial 3) $\Rightarrow$ 2). Y en fin, 1) $\Rightarrow$ 3): si F es exacto, entonces se ve que poniendo $L_0 F := F$ y $L_n := 0$ para $n > 0$ se obtiene un δ-funtor universal. ■

La definición de δ-funtore universal implica en particular la siguiente

1.8. Observación.

1) Sean $F, G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ dos funtores aditivos exactos por la derecha. Supongamos que sus funtores derivados $L_n F$ y $L_n G$ existen. Entonces una transformación natural $F \Rightarrow G$ induce transformaciones naturales $L_n F \Rightarrow L_n G$ tales que cada diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induce el diagrama conmutativo con filas exactas

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & L_nF(K) \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr] & & L_nF(M) \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr] & & L_nF(N) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dd] \arrow[dr] & & L_{n-1}F(K) \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr] & & \cdots & \\
\cdots \arrow[rr] & & L_nG(K) \arrow[rr] \arrow[dd] & & L_nG(M) \arrow[rr] \arrow[dd] & & L_nG(N) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dd] & & L_{n-1}G(K) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & L_nF(K') \arrow[rr] \arrow[dr] & & L_nF(M') \arrow[rr] \arrow[dr] & & L_nF(N') \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr] & & L_{n-1}F(K') \arrow[rr] \arrow[dr] & & \cdots & \\
\cdots \arrow[rr] & & L_nG(K') \arrow[rr] & & L_nG(M') \arrow[rr] & & L_nG(N') \arrow[rr, "\delta"] & & L_{n-1}G(K') \arrow[rr] & & \cdots
\end{tikzcd}
$$

2) *Sean $F, G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ dos funtores aditivos exactos por la izquierda. Supongamos que sus funtores derivados R^nF y R^nG existen. Entonces una transformación natural $F \Rightarrow G$ induce transformaciones naturales $R^nF \Rightarrow R^nG$ tales que cada diagrama conmutativo con filas exactas*

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

induce el diagrama conmutativo con filas exactas

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & R^nF(K) \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr] & & R^nF(M) \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr] & & R^nF(N) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dd] \arrow[dr] & & R^{n+1}F(K) \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr] & & \cdots & \\
\cdots \arrow[rr] & & L_nG(K) \arrow[rr] \arrow[dd] & & R^nG(M) \arrow[rr] \arrow[dd] & & R^nG(N) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dd] & & R^{n+1}G(K) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & R^nF(K') \arrow[rr] \arrow[dr] & & R^nF(M') \arrow[rr] \arrow[dr] & & R^nF(N') \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr] & & R^{n+1}F(K') \arrow[rr] \arrow[dr] & & \cdots & \\
\cdots \arrow[rr] & & R^nG(K') \arrow[rr] & & R^nG(M') \arrow[rr] & & R^nG(N') \arrow[rr, "\delta"] & & R^{n+1}G(K') \arrow[rr] & & \cdots
\end{tikzcd}
$$

El término “δ-funtor” fue introducido por Grothendieck en el artículo de Tohoku (1957), pero esta noción ya estaba tácita en el libro de texto de Cartan y Eilenberg (publicado en 1956, pero el trabajo había empezado mucho tiempo antes).

2. Teorema de Grothendieck sobre δ-funtores borrables

Como hemos visto, los funtores derivados $L_nF\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $R^nF\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ tienen propiedades muy naturales y útiles para estudiar sucesiones exactas. El único problema es que todavía no sabemos si los funtores derivados existen. El modo más común de construirlos son resoluciones proyectivas e inyectivas, que existen bajo ciertas hipótesis sobre la categoría abelana **A**. También vamos a necesitar más construcciones relacionadas con complejos de (co)cadenas. Terminamos esta parte con un criterio útil de universalidad de δ-funtores.

2.1. Definición. Un δ-funtor izquierdo $(E_\bullet, \delta_\bullet)$ es **borrable** si para cada $n > 0$ y cada $M \in \mathbf{A}$ existe un epimorfismo $N \twoheadrightarrow M$ (¡no necesariamente único!) tal que $E_n(N) = 0$.

Un δ-funtor derecho $(E^\bullet, \delta^\bullet)$ es **borrable** si para cada $n > 0$ y cada $M \in \mathbf{A}$ existe un monomorfismo $M \rightarrowtail N$ (¡no necesariamente único!) tal que $E^n(N) = 0$.

2.2. Proposición (Grothendieck). *Sea $(E_\bullet, \delta_\bullet)$ un δ-funtor izquierdo borrable. Entonces $(E_\bullet, \delta_\bullet)$ es universal.*

Sea $(E^\bullet, \delta^\bullet)$ un δ-funtor derecho borrable. Entonces $(E^\bullet, \delta^\bullet)$ es universal.

Demostración. Vamos a ver la parte con los funtores izquierdos. Sea $(T_\bullet, \partial_\bullet)$ otro δ-funtor izquierdo. Tenemos que ver que una transformación natural $f_0\colon T_0 \Rightarrow E_0$ se extiende de modo único a transformaciones naturales $f_n\colon T_n \Rightarrow E_n$ que conmutan con δ y ∂. La construcción es inductiva: suponemos que para $i < n$ tenemos transformaciones $f_i\colon T_i \Rightarrow E_i$ y construimos $f_n\colon T_n \Rightarrow E_n$.

Sea $M \in \mathbf{A}$ cualquier objeto. Ya que E_n es borrable, existe un epimorfismo $N \twoheadrightarrow M$ tal que $E_n(N) = 0$. Sea K el núcleo de este epimorfismo:

$$0 \to K \rightarrowtail N \twoheadrightarrow M \to 0$$

$(E_\bullet, \delta_\bullet)$ y $(T_\bullet, \partial_\bullet)$ son δ-funtores, de donde tenemos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & T_n(K) \arrow[r] & T_n(N) \arrow[r] & T_n(M) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, dashed, "?"] & T_{n-1}(K) \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1,K}"] & T_{n-1}(N) \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1,N}"] & T_{n-1}(M) \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1,M}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & E_n(K) \arrow[r] & E_n(N) \arrow[r] & E_n(M) \arrow[r, "\delta_n"] & E_{n-1}(K) \arrow[r] & E_{n-1}(N) \arrow[r] & E_{n-1}(M) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Y como $E_n(N) = 0$, se sigue que $E_n(M)$ es el núcleo del morfismo $E_{n-1}(K) \to E_{n-1}(N)$. Luego, la composición $T_n(M) \xrightarrow{\partial_n} T_{n-1}(K) \xrightarrow{f_{n-1,K}} E_{n-1}(K) \to E_{n-1}(N)$ es 0, y entonces por la propiedad universal del núcleo existe un morfísmo único $f^K_{n,M}\colon T_n(M) \to E_n(M)$ tal que el diagrama es conmutativo.

Tenemos que ver que nuestra elección del epimorfismo $N \twoheadrightarrow M$ tal que $E_n(N) = 0$ no afecta el resultado. Sean $N_1 \twoheadrightarrow M$ y $N_2 \twoheadrightarrow M$ dos epimorfismos tales que $E_n(N_1) = E_n(N_2) = 0$. Tenemos dos sucesiones exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_2 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sea $N := N_1 \oplus N_2$. Entonces $E_n(N) = E_n(N_1 \oplus N_2) = E_n(N_1) \oplus E_n(N_2) = 0$, y tenemos un epimorfismo $N \twoheadrightarrow M$. Para $i = 1, 2$ hay diagramas conmutativos con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_i \arrow[r] \arrow[d] & N_i \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & N \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Notamos que la sucesión exacta

$$E_n(N) \to E_n(M) \xrightarrow{\delta_n} E_{n-1}$$

y $E_n(N) = 0$ implican que δ_n es un monomorfismo. El diagrama de arriba induce a su vez el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
T_n(M) \arrow[rr, "\partial_n"] \arrow[dr, equal] \arrow[dd, "f^{K_i}_{n,M}"'] & & T_{n-1}(K_i) \arrow[dr] \arrow[dd, "f_{n-1,K_i}", near start] & \\
& T_n(M) \arrow[rr, "\partial_n", near start] \arrow[dd, "f^{K}_{n,M}", near start] & & T_{n-1}(K) \arrow[dd, "f_{n-1,K}"] \\
E_n(M) \arrow[rr, tail, "\delta_n", near end] \arrow[dr, equal] & & E_{n-1}(K_i) \arrow[dr] & \\
& E_n(M) \arrow[rr, tail, "\delta_n"'] & & E_{n-1}(K)
\end{tikzcd}
$$

Aquí la cara de arriba es conmutativa porque $(T_\bullet, \partial_\bullet)$ es un δ-funtor y la cara de abajo es conmutativa porque $(E_\bullet, \delta_\bullet)$ es un δ-funtor; la cara frontal y la cara posterior conmutan por la construcción de los morfismos f_n; la cara a la derecha es conmutativa porque f_{n-1} es natural por nuestra hipótesis de inducción. En el diagrama se ve que $\delta_n \circ f^{K_i}_{n,M} = \delta_n \circ f^{K}_{n,M}$, de donde $f^{K_i}_{n,M} = f^{K}_{n,M}$, ya que δ_n es un monomorfismo. Hemos demostrado que los morfismos $f_{n,M}$ construidos a partir de K_1 y K_2 coinciden:

$$f^{K_1}_{n,M} = f^{K_2}_{n,M} = f^{K}_{n,M}.$$

En conclusión, la elección del epimorfismo $N \twoheadrightarrow M$ tal que $E_n(N) = 0$ no afecta el resultado.

Ahora veamos por qué los morfismos $f_{n,M} \colon T_n(M) \to E_n(M)$ definen una transformación natural de funtores. Consideremos el diagrama conmutativo con filas exactas

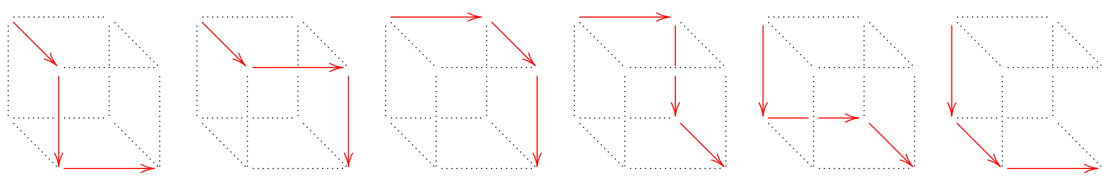
$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi'"'] & N_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_2 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & M_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Tenemos el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
T_n(M_1) \arrow[rr, "\partial_n"] \arrow[dr, "T_n(\phi)"] \arrow[dd, "f_{n,M_1}"'] & & T_{n-1}(K_1) \arrow[dr, "T_{n-1}(\phi')"] \arrow[dd, "f_{n-1,K_1}" near start] & \\
& T_n(M_2) \arrow[rr, "\partial_n" near start] \arrow[dd, "f_{n,M_2}" near start] & & T_{n-1}(K_2) \arrow[dd, "f_{n-1,K_2}"] \\
E_n(M_1) \arrow[rr, tail, "\delta_n" near end] \arrow[dr, "E_n(\phi)"'] & & E_{n-1}(K_1) \arrow[dr, "E_{n-1}(\phi')"] & \\
& E_n(M_2) \arrow[rr, tail, "\delta_n"'] & & E_{n-1}(K_2)
\end{tikzcd}
$$

Aquí sabemos que todo es conmutativo, excepto la cara a la derecha, cuya conmutatividad tenemos que verificar. Pero por la conmutatividad de otras caras, se ve que

$$\delta_n \circ f_{n,M_2} \circ T_n(\phi) = \delta_n \circ E_n(\phi) \circ f_{n,M_1}.$$



Pero δ_n es un monomorfismo, y así

$$f_{n,M_2} \circ T_n(\phi) = E_n(\phi) \circ f_{n,M_1}.$$

■

La palabra "borrable" es mi traducción literal del término francés "effaçable" que también viene del artículo de Tohoku (en inglés se usa el mismo término: "effaceable").