Álgebra homológica, día 7

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

16 de agosto de 2016

1. La categoría de complejos $\mathbf{Com}(\mathbf{A})$

1.1. Definición. Un **complejo de cocadenas** en una categoría abeliana es una sucesión de morfismos

$$(M^\bullet, d^\bullet)\colon\; (\cdots \to M^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} M^n \xrightarrow{d^n} M^{n+1} \to \cdots)$$

tal que $d^n \circ d^{n-1} = 0$ para cada n.

En particular, las sucesiones exactas son casos muy particulares de complejos.

1.2. Definición. Notamos que si $(M^\bullet, d^\bullet)$ es un complejo de cocadenas, entonces existen morfismos canónicos $\operatorname{im} d^{n-1} \rightarrowtail \ker d^n$ y $\operatorname{coker} d^{n-1} \twoheadrightarrow \operatorname{im} d^n$

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{im} d^{n-1} \arrow[rr, dashed, tail, "\exists!"] \arrow[dr, tail] & & \ker d^n \arrow[dl, tail] & \\
M^{n-1} \arrow[ur, two heads] \arrow[rr, "d^{n-1}"] & & M^n \arrow[rr, "d^n"] \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & & M^{n+1} \\
 & \operatorname{coker} d^{n-1} \arrow[rr, dashed, two heads, "\exists!"] & & \operatorname{im} d^n \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}$$

La **cohomología** de $(M^\bullet, d^\bullet)$ en el grado n es el objeto

$$H^n(M^\bullet, d^\bullet) := \operatorname{coker}(\operatorname{im} d^{n-1} \rightarrowtail \ker d^n) \cong \ker(\operatorname{coker} d^{n-1} \twoheadrightarrow \operatorname{im} d^n).$$

Note que $(M^\bullet, d^\bullet)$ es una sucesión exacta si y solamente si $H^n(M^\bullet, d^\bullet) = 0$ para cada n. La cohomología sirve para medir la inexactitud de un complejo.

En el caso de R-módulos la condición $d^n \circ d^{n-1} = 0$ significa que

$$\operatorname{im}(M^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} M^n) \subseteq \ker(M^n \xrightarrow{d^n} M^{n+1})$$

y la cohomología correspondiente es dada por

$$H^n(M^\bullet, d^\bullet) = \frac{\ker(M^n \xrightarrow{d^n} M^{n+1})}{\operatorname{im}(M^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} M^n)}.$$

La palabra "cadena" viene de topología y para nosotros no tiene ningún significado especial. Los elementos de $Z^n := \ker d^n$ también se llaman **cociclos** y los elementos de $B^n := \operatorname{im} d^{n-1}$ se llaman **cofronteras**; es también terminología topológica.

Decimos co-cadenas, co-ciclos, co-fronteras y co-homología porque también hay complejos de cadenas, con ciclos, fronteras y homología. Un **complejo de cadenas** es la misma cosa, solo con numeración opuesta, a saber una sucesión de morfismos

$$(M_\bullet, d_\bullet)\colon (\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} M_{n-2} \to \cdots)$$

tal que $d_{n-1} \circ d_n = 0$ para cada n. Su **homología** es dada por $H_n(M_\bullet, d_\bullet) := Z_n / B_n := \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1}$. Para evitar cualquier confusión, vamos trabajar solo con complejos de cocadenas (que vamos a llamar simplemente "complejos") y cohomología. Obviamente, todos nuestros resultados pueden ser escritos con la numeración homológica.

El término "homología" viene del griego ὁμολογία, "correspondencia" (ὁμός = "mismo" y λόγος = "relación") y fue introducido por Poincaré en su artículo "Analysis Situs" (1895). En biología "homología" significa una "relación de correspondencia que ofrecen entre sí partes que en diversos organismos tienen el mismo origen aunque su función pueda ser diferente" (el diccionario de la RAE).

Los morfismos d^n y d_n se llaman **diferenciales** porque en geometría a cada variedad lisa se puede asociar un complejo, llamado el **complejo de de Rham**, donde d^n son las derivadas exteriores (definidas como diferenciales df para funciones lisas f y por la regla del producto $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha}(\alpha \wedge d\beta)$ para las formas diferenciales).

Muchas ideas y la terminología (por ejemplo, "morfismos homotópicos" y "cono" abajo) vienen de topología. De hecho, el álgebra homológica nació en el siglo XIX en los trabajos de Riemann, Betti y Poincaré. Solo en 1925 Heinz Hopf (1884–1971) visitó la universidad de Gotinga donde encontró a Emmy Noether, quien hizo la observación que los topólogos en realidad estaban trabajando con ciertos complejos de R-módulos. El punto de vista puramente algebraico se cristalizó en los años 40–50, sobre todo con el libro de texto "Homological Algebra" de Cartan y Eilenberg publicado en 1956.

Para mayor información sobre la historia del álgebra homológica y sus varias facetas véase el ensayo de Weibel `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0245/`

Los complejos son ubicuos en topología algebraica, topología diferencial, análisis y, por supuesto, en álgebra. No tenemos tiempo para ver muchos ejemplos; para nosotros la mayoría de complejos van a surgir de la siguiente manera. Supongamos que $(M^\bullet, d^\bullet)$ es una sucesión exacta:

$$\cdots \to M^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} M^n \xrightarrow{d^n} M_{n+1} \xrightarrow{d_{n-1}} M_{n-2} \to \cdots$$

es decir, $\operatorname{im} d^{n-1} = \ker d^n$ para cada n. La cohomología $H^n(M^\bullet)$ es entonces trivial. Ahora sea $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor aditivo. Tenemos

$$F(d^n) \circ F(d^{n-1}) = F(d^n \circ d^{n-1}) = F(0) = 0.$$

Entonces F induce un complejo

$$\cdots \to F(M^{n-1}) \xrightarrow{F(d^{n-1})} F(M^n) \xrightarrow{F(d^n)} F(M^{n+1}) \xrightarrow{F(d^{n+1})} F(M^{n+2}) \to \cdots$$

que no es necesariamente exacto si F no es exacto, y es interesante calcular la homología del complejo $F(M^\bullet)$. En general, si $(M^\bullet, d^\bullet)$ es un complejo, entonces $(F(M^\bullet), F(d^\bullet))$ es también un complejo.

1.3. Definición. Un **morfismo de complejos** $f^\bullet\colon (M^\bullet, d_M^\bullet) \to (N^\bullet, d_N^\bullet)$ es una colección de morfismos $f^n\colon M^n \to N^n$ que conmuta con los diferenciales; es decir, una "escalera conmutativa":

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M^{n-1} \arrow[r, "d_M^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"] & M^n \arrow[r, "d_M^n"] \arrow[d, "f^n"] & M^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N^{n-1} \arrow[r, "d_N^{n-1}"] & N^n \arrow[r, "d_N^n"] & N^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

$$f^{n+1} \circ d_M^n = d_N^n \circ f^n \quad \text{para cada } n.$$

Los complejos de objetos de una categoría abeliana $\mathbf{A}$ forman una categoría $\mathbf{Com}(\mathbf{A})$ que es también abeliana:

1.4. Observación. *Sea $\mathbf{A}$ una categoría abeliana.*

0) *Un monomorfismo $f^\bullet\colon M^\bullet \rightarrowtail N^\bullet$ en la categoría $\mathbf{Com}(\mathbf{A})$ es un morfismo de complejos tal que $f^n\colon M^n \rightarrowtail N^n$ es un monomorfismo para cada n.*

   Un epimorfismo $f^\bullet\colon M^\bullet \twoheadrightarrow N^\bullet$ en la categoría $\mathbf{Com}(\mathbf{A})$ es un morfismo de complejos tal que $f^n\colon M^n \twoheadrightarrow N^n$ es un epimorfismo para cada n.

1) *Si $f^\bullet, g^\bullet\colon M^\bullet \to N^\bullet$ son morfismos de complejos, entonces*

$$(f^\bullet \pm g^\bullet)^n := f^n \pm g^n$$

   es también un morfismo de complejos $M^\bullet \to N^\bullet$.

2) *El complejo formado por objetos cero de $\mathbf{A}$*

$$\cdots \to 0 \to 0 \to 0 \to \cdots$$

   es un objeto cero en $\mathbf{Com}(\mathbf{A})$.

3) *El producto (coproducto, biproducto) de complejos $M^\bullet$ y $N^\bullet$ es el complejo definido por*

$$(M^\bullet \oplus N^\bullet)^n := M^n \oplus N^n$$

   con los diferenciales $d_M^n \oplus d_N^n := \begin{pmatrix} d_M^n & 0 \\ 0 & d_N^n \end{pmatrix} : M^n \oplus N^n \to M^{n+1} \oplus N^{n+1}$.

4) *Si $f^\bullet\colon M^\bullet \to N^\bullet$ es un morfismo de complejos, su núcleo es el complejo*

$$\ker f^\bullet \rightarrowtail M^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} N^\bullet$$

   donde

$$(\ker f^\bullet)^n = \ker f^n.$$

   El conúcleo es el complejo

$$M^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} N^\bullet \twoheadrightarrow \operatorname{coker} f^\bullet$$

   donde

$$(\operatorname{coker} f^\bullet)^n = \operatorname{coker} f^n.$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dashed] & \ker f^{n-1} \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail] & \ker f^n \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail] & \ker f^{n+1} \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M^{n-1} \arrow[r, "d_M^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & M^n \arrow[r, "d_M^n"] \arrow[d, "f^n"'] & M^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N^{n-1} \arrow[r, "d_N^{n-1}"] \arrow[d, two heads] & N^n \arrow[r, "d_N^n"] \arrow[d, two heads] & N^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, dashed] & \operatorname{coker} f^{n-1} \arrow[r, dashed] & \operatorname{coker} f^n \arrow[r, dashed] & \operatorname{coker} f^{n+1} \arrow[r, dashed] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Todo esto define una estructura de categoría abeliana sobre $\mathbf{Com}(\mathbf{A})$.

Para nuestros objetivos las siguientes subcategorías abelianas de $\mathbf{Com}(\mathbf{A})$ van a ser importantes:

- $\mathbf{Com}^{\geq 0}(\mathbf{A}) \subset \mathbf{Com}(\mathbf{A})$: complejos $M^\bullet$ tales que $M^n = 0$ para $n < 0$.
- $\mathbf{Com}^{\leq 0}(\mathbf{A})$: complejos $M^\bullet$ tales que $M^n = 0$ para $n > 0$.

Morfismos de complejos inducen morfismos en cohomología:

1.5. Observación. *Un morfismo de complejos $f^\bullet \colon M^\bullet \to N^\bullet$ induce morfismos en cohomología $f_*^n \colon H^n(M^\bullet) \to H^n(N^\bullet)$ para cada n, de tal modo que la cohomología es una familia de funtores aditivos*

$$H^n \colon \mathbf{Com}(\mathbf{A}) \to \mathbf{A}$$

(es decir, $(f^n \circ g^n)_* = f_*^n \circ g_*^n$, $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}$ y $(f^n \pm g^n)_* = f_*^n \pm g_*^n$).

Demostración. Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M^{n-1} \arrow[r, "d_M^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & M^n \arrow[r, "d_M^n"] \arrow[d, "f^n"'] & M^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"'] \\
N^{n-1} \arrow[r, "d_N^{n-1}"'] & N^n \arrow[r, "d_N^n"'] & N^{n+1}
\end{tikzcd}$$

Se ve que f^n induce morfismos canónicos $\ker d_M^n \to \ker d_N^n$ ("restricción" de f^n a $\ker d^n$) y $\operatorname{im} d_M^{n-1} \to \operatorname{im} d_N^{n-1}$ ("restricción" de f^n a $\operatorname{im} d^{n-1}$) de tal modo que tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{im} d_M^{n-1} \arrow[r, tail] \arrow[d] & \ker d_M^n \arrow[r, two heads] \arrow[d] & H^n(M^\bullet) \arrow[d, dashed, "f_*^n"] \\
\operatorname{im} d_N^{n-1} \arrow[r, tail] & \ker d_N^n \arrow[r, two heads] & H^n(N^\bullet)
\end{tikzcd}$$

Dejo los detalles al lector; en términos de elementos (en la categoría de R-módulos) todo debe ser obvio:

$$f_*^n \colon H^n(M^\bullet) := \frac{\ker d_M^n}{\operatorname{im} d_M^{n-1}} \to H^n(N^\bullet) := \frac{\ker d_N^n}{\operatorname{im} d_N^{n-1}},$$
$$x + \operatorname{im} d_M^{n-1} \mapsto f^n(x) + \operatorname{im} d_N^{n-1}.$$

De hecho, si $x \in \ker d_M^n$, entonces $d_N^n(f^n(x)) = f^{n+1}(d_M^n(x)) = 0$ y $f^n(x) \in \ker d_N^n$, y si $x = d_M^{n-1}(x') \in \operatorname{im} d_M^{n-1}$, entonces $f^n(x) = f^n(d_M^{n-1}(x')) = d_N^{n-1}(f^{n-1}(x')) \in \operatorname{im} d_N^{n-1}$. ∎

2. Homotopías y cuasi-isomorfismos

Morfismos entre complejos $f^\bullet \colon M^\bullet \to N^\bullet$ inducen morfismos en cohomología $f_*^n \colon H^n(M^\bullet) \to H^n(N^\bullet)$. Es importante saber cuándo diferentes $f^\bullet, g^\bullet$ inducen los mismos morfismos $f_*^n = g_*^n$, o cuándo un morfismo $f^\bullet$ induce un isomorfismo $f_*^n \colon H^n(M^\bullet) \xrightarrow{\cong} H^n(N^\bullet)$. Esta sección está dedicada a tales situaciones.

2.1. Definición.

1) Sea $s^\bullet \colon M^\bullet \to N^\bullet$ un morfismo entre complejos. Se dice que $s^\bullet$ es **homotópico a cero** (notación: $s^\bullet \simeq 0$) si existe una familia de morfismos

$$h^n \colon M^n \to N^{n-1}$$

tal que para cada n

$$s^n = d_N^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d_M^n.$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "s^{n-1}"'] & M^n \arrow[r, "d_M^n"] \arrow[d, "s^n"'] \arrow[dl, "h^n"'] & M^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "s^{n+1}"'] \arrow[dl, "h^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N^{n-1} \arrow[r, "d_N^{n-1}"'] & N^n \arrow[r] & N^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(¡cuidado! no es un diagrama conmutativo: los morfismos s^n conmutan con $d^\bullet$, pero los morfismos h^n solo deben satisfacer la identidad de arriba; en otras palabras, solo "$d \circ h + h \circ d$" conmuta con los diferenciales.)

2) Si $f^\bullet$ y $g^\bullet$ son morfismos de complejos $M^\bullet \to N^\bullet$ tales que $s^\bullet := f^\bullet - g^\bullet$ es homotópico a cero, entonces se dice que $f^\bullet$ y $g^\bullet$ son **homotópicos** (notación: $f^\bullet \simeq g^\bullet$).

2.2. Observación. *Si $s^\bullet \simeq 0$, entonces los morfismos inducidos en cohomología $s_*^n \colon H^n(M^\bullet) \to H^n(N^\bullet)$ son nulos. En particular, si $f^\bullet \simeq g^\bullet$, entonces $f^\bullet$ y $g^\bullet$ inducen los mismos morfismos en cohomología:*

$$f_*^n = g_*^n \colon H^n(M^\bullet) \to H^n(N^\bullet)$$

Demostración. En términos de elementos: sea $x + \operatorname{im} d_M^{n-1} \in H^n(M^\bullet) := \ker d_M^n / \operatorname{im} d_M^{n-1}$ para algún $x \in \ker d_M^n$. El morfismo s_*^n está definido por $x + \operatorname{im} d_M^{n-1} \mapsto s^n(x) + \operatorname{im} d_M^{n-1}$. Si $s^\bullet$ es homotópico a cero, tenemos

$$s^n(x) = \underbrace{d_N^{n-1} \circ h^n(x)}_{\in \operatorname{im} d_N^{n-1}} + h^{n+1} \circ \underbrace{d_M^n(x)}_{=0} = 0 \pmod{\operatorname{im} d_N^{n-1}}.$$

■

2.3. Definición. Se dice que un morfismo de complejos $f^\bullet \colon M^\bullet \to N^\bullet$ es un **cuasi-isomorfismo** si $f^\bullet$ induce isomorfismos $f_*^n \colon H^n(M^\bullet) \xrightarrow{\cong} H^n(N^\bullet)$ para todo n.

Se dice que dos complejos $M^\bullet$ y $N^\bullet$ son **homotópicos** si existen morfismos de complejos $f^\bullet \colon M^\bullet \to N^\bullet$ y $g^\bullet \colon N^\bullet \to M^\bullet$ tales que $g^\bullet \circ f^\bullet \simeq \mathrm{id}_{M^\bullet}$ y $f^\bullet \circ g^\bullet \simeq \mathrm{id}_{N^\bullet}$.

Por supuesto, el término "homotopía" viene de topología. Para cada espacio topológico X se puede definir cierto complejo $C_\bullet(X)$ (con numeración homológica), que se llama el **complejo singular**. Su homología $H_n(X) := H_n(C_\bullet(X))$ es la **homología singular** de X. Cada aplicación continua $X \to Y$ induce un morfismo de complejos $f_\bullet \colon C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$, y además, a partir de una homotopía (en el sentido topológico) entre dos aplicaciones continuas $f, g \colon X \to Y$ se puede construir una homotopía entre morfismos de complejos $f_\bullet \simeq g_\bullet$. Esto quiere decir que si dos espacios X y Y son homotópicamente equivalentes, entonces $H_n(X) \cong H_n(Y)$.

Para mayor información pueden leer cualquier libro de topología algebraica; recomiendo "A Concise Course in Algebraic Topology" de J.P. May que es bastante... conciso: http://www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf

Cuidado: en la noción de cuasi-isomorfismo no se trata simplemente de isomorfismos $H^n(M^\bullet) \cong H^n(N^\bullet)$ para cada n, sino del hecho que estos isomorfismos están inducidos por cierto morfismo de complejos $M^\bullet \to N^\bullet$. Si dos complejos $M^\bullet$ y $N^\bullet$ son homotópicos, entonces $M^\bullet$ y $N^\bullet$ son cuasi-isomorfos. Pero dos complejos pueden ser cuasi-isomorfos sin ser homotópicos:

2.4. Ejemplo. Consideremos el siguiente morfismo entre dos complejos de grupos abelianos:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\times n"] \arrow[d, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Estos complejos tienen los mismos grupos de cohomología, que son $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en una posición y 0 en las otras. Además, el morfismo de arriba induce isomorfismos en cohomología, y entonces es un cuasi-isomorfismo. Pero, como $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un grupo de torsión y $\mathbb{Z}$ es libre de torsión, entonces el único morfismo de complejos en la otra dirección es nulo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\times n"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[u, "0"] & 0 \arrow[r] \arrow[u, "0"] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u, "0"] & 0 \arrow[r] \arrow[u, "0"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Por tanto, aunque nuestros complejos son cuasi-isomorfos, no pueden ser homotópicos. Además, este ejemplo demuestra que si existe un cuasi-isomorfismo $f^\bullet \colon M^\bullet \to N^\bullet$, esto no implica existencia de un cuasi-isomorfismo $g^\bullet \colon N^\bullet \to M^\bullet$. ▲

De la misma manera, si para un complejo $M^\bullet$ el morfismo identidad $\mathrm{id}_{M^\bullet}$ es homotópico a cero, entonces $M^\bullet$ es exacto. Pero puede ser que $M^\bullet$ es exacto y $\mathrm{id}_{M^\bullet} \not\simeq 0$:

2.5. Ejemplo. Consideramos nuestra sucesión exacta preferida de grupos abelianos:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

Una homotopía $\mathrm{id}_{M^\bullet} \simeq 0$ sería una familia de morfismos $h^n \colon M^n \to M^{n-1}$ que satisfacen

$$\mathrm{id}_{M^n} = d^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d^n.$$

Fijémonos bien en el diagrama correspondiente:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\times n"] \arrow[d, equal] \arrow[dl] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, "h^1"'] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, "h^0"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\times n"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

El único morfismo posible $h^0 \colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es 0, y entonces la homotopía implicaría que la composición $\mathbb{Z} \xrightarrow{h^1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z}$ coincide con $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, lo cual es absurdo. ▲

Para resumir: tenemos implicaciones *estrictas*

$$\begin{aligned}
M^\bullet \simeq N^\bullet \quad &\Longrightarrow \quad H^n(M^\bullet) \cong H^n(N^\bullet), \\
\mathrm{id}_{M^\bullet} \simeq 0 \quad &\Longrightarrow \quad H^n(M^\bullet) = 0
\end{aligned}$$

Notemos que si $M^\bullet$ y $N^\bullet$ son homotópicos, entonces para cualquier funtor aditivo F los complejos $F(M^\bullet)$ y $F(N^\bullet)$ son también homotópicos (porque los funtores aditivos preservan las relaciones de la forma "$g \circ f - \mathrm{id} = d \circ h + h \circ d$"). Para cuasi-isomorfismos es más complicado: si $M^\bullet$ y $N^\bullet$ son cuasi-isomorfos, los complejos $F(M^\bullet)$ y $F(N^\bullet)$ pueden no ser cuasi-isomorfos.

Un breve comentario. Se puede considerar los complejos $M^\bullet$ módulo cuasi-isomorfismos: dos complejos $M^\bullet$ y $N^\bullet$ se identifican si existe un cuasi-isomorfismo entre $M^\bullet$ y $N^\bullet$. Esto a partir de nuestra categoría $\mathbf{Com}(\mathbf{A})$ produce otra categoría

$$\mathbf{D}(\mathbf{A}) := \text{“}\mathbf{Com}(\mathbf{A}) \text{ módulo cuasi-isomorfismos”},$$

que se llama la **categoría derivada** de $\mathbf{A}$. La construcción de $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ es un poco técnica, porque hay que precisar qué quiere decir considerar $\mathbf{Com}(\mathbf{A})$ módulo cierta clase de morfismos (esto se llama **localización** de categorías). A veces $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ se construye en dos pasos, primero se considera la **categoría homotópica**

$$\mathbf{K}(\mathbf{A}) := \text{“}\mathbf{Com}(\mathbf{A}) \text{ módulo homotopías”}$$

y después se toma $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ módulo cuasi-isomorfismos (les recuerdo que complejos homotópicos son casos particulares de complejos cuasi-isomorfos).

Las categorías $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ y $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ son aditivas, mas no abelianas. Sin embargo, estas categorías satisfacen otros axiomas especiales de **categorías trianguladas**, que son suficientes para construcciones fundamentales del álgebra homológica. De hecho, el punto de vista correcto del álgebra homológica es el de categorías derivadas y trianguladas. Por ejemplo, los funtores derivados que vamos a estudiar más adelante son más naturales en el lenguaje de categorías derivadas. Pero todo esto haría parte de otro curso de álgebra homológica, un poco más avanzado que nuestra breve introducción.

Una pregunta natural es si los funtores aditivos $H^n\colon \mathbf{Com}(\mathbf{A}) \to \mathbf{A}$ son exactos. A saber, si tenemos una sucesión exacta de complejos

$$0 \to K^\bullet \to M^\bullet \to N^\bullet \to 0$$

que es un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_K^{n-1}"'] & M^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_M^{n-1}"'] & N^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_N^{n-1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^n \arrow[r] \arrow[d, "d_K^n"'] & M^n \arrow[r] \arrow[d, "d_M^n"'] & N^n \arrow[r] \arrow[d, "d_N^n"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & M^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & N^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

¿es verdad que las sucesiones correspondientes

$$??? \to H^n(K^\bullet) \to H^n(M^\bullet) \to H^n(N^\bullet) \to ???$$

son también exactas? Es fácil ver que $\operatorname{im}(H^n(K^\bullet) \to H^n(M^\bullet)) = \ker(H^n(M^\bullet) \to H^n(N^\bullet))$ (¡ejercicio!), pero en general $H^n(K^\bullet) \to H^n(M^\bullet)$ no es mono y $H^n(M^\bullet) \to H^n(N\bullet)$ no es epi. Entonces, el funtor H^n es solamente "exacto en el medio". Sin embargo, en vez de sucesiones exactas cortas con H^n, tenemos sucesiones exactas largas de la forma

$$\cdots \to H^{n-1}(N^\bullet) \xrightarrow{\delta^{n-1}} H^n(K^\bullet) \to H^n(M^\bullet) \to H^n(N^\bullet) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(K\bullet) \to \cdots$$

Esto ayuda a hacer cálculos de cohomología. La parte delicada son los **morfismos de conexión** $\delta^n\colon H^n(N^\bullet) \to H^{n+1}(K^\bullet)$ y su construcción necesita un poco de trabajo.

3. * Elementos y el encajamiento de Freyd–Mitchell

Hemos visto que R-**Mód** es una categoría abeliana, y para nosotros es el ejemplo fundamental: en nuestro curso vamos a trabajar solamente con R-módulos. En cierto sentido, es el único ejemplo de categorías abelianas:

3.1. Hecho (El encajamiento de Freyd–Mitchell). *Si $\mathbf{A}_0$ es una categoría abeliana pequeña (cuyos objetos forman un conjunto), entonces existe un anillo R y un funtor fielmente pleno y exacto*

$$F\colon \mathbf{A}_0 \to R\text{-}\mathbf{Mód}.$$

Esto quiere decir que cada categoría abeliana pequeña puede ser vista como una subcategoría plena de la categoría de ciertos R-módulos. Pero hay que tener cuidado: es importante que $\mathbf{A}_0$ sea pequeña. El teorema a veces se invoca para usar elementos de objetos $x \in M$ en las demostraciones (por ejemplo para decir cosas como “en tal diagrama conmutativo, si tenemos una parte exacta $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ y para un elemento $x \in M$ tenemos $g(x) = 0$, entonces existe algún $x' \in M'$ tal que $f(x') = x$”). En general, los objetos de $\mathbf{A}$ no son conjuntos y no tienen elementos, pero para demostrar alguna propiedad que trata de un *numero finito* de objetos y morfismos de $\mathbf{A}$, podemos considerar la subcategoría abeliana plena $\mathbf{A}_0 \subset \mathbf{A}$ generada por estos objetos y morfismos e interpretar los objetos de $\mathbf{A}_0$ como R-módulos.

En realidad, esta aplicación del teorema de Freyd–Mitchell es un poco inapropiada: el teorema tiene valor puramente teórico, y para trabajar con “elementos” se puede definir la noción abstracta de elementos en cada categoría abeliana, sin encajarla en ninguna categoría R-**Mód**. Para esto véase [Borceux, vol. II, 1.9–1.10] o [Mac Lane, §VIII.4]

Nosotros vamos a usar el tercer método: simplemente trabajar con elementos cuando es necesario, sin justificarlo, porque nos interesan solamente las categorías de R-módulos, donde objetos son conjuntos con cierta estructura, monomorfismos son inyecciones y epimorfismos son sobreyecciones, etc.

La posibilidad de trabajar con elementos y el teorema de Freyd–Mitchell no implican que todas las categorías abelianas se comportan como R-**Mód**. Hay propiedades que no se fórmulan en términos de un numero finito de objetos y morfismos, por ejemplo la propiedad de tener suficientes objetos proyectivos o inyectivos que vamos a estudiar más adelante.

4. Lema de la serpiente

4.1. Proposición (Lema de la serpiente). *Supongamos que en una categoría abeliana tenemos un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d'"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "h"'] & N \arrow[r, "k"'] & N'' \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}$$

donde las dos filas son exactas. Entonces existe una sucesión exacta

$$0 \dashrightarrow \ker d' \xrightarrow{\overline{f}} \ker d \xrightarrow{\overline{g}} \ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d' \xrightarrow{\overline{h}} \operatorname{coker} d \xrightarrow{\overline{k}} \operatorname{coker} d'' \dashrightarrow 0$$

donde δ se llama el ***morfismo de conexión*** *y está definido por*

$$\delta(x'') := [h^{-1} \circ d \circ g^{-1}(x'')],$$

y los otros morfismos son los inducidos por f, g, h, k: a saber, $\overline{f} = f|_{\ker d'}$, $\overline{g} = g|_{\ker d}$, y

$$\begin{aligned} \overline{h}\colon \operatorname{coker} d' := \frac{N'}{\operatorname{im} d'} &\to \operatorname{coker} d := \frac{N}{\operatorname{im} d}, \\ (y' + \operatorname{im} d') &\mapsto (h(y') + \operatorname{im} d); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{k}\colon \operatorname{coker} d := \frac{N}{\operatorname{im} d} &\to \operatorname{coker} d'' := \frac{N''}{\operatorname{im} d''}, \\ (y + \operatorname{im} d) &\mapsto (k(y) + \operatorname{im} d''). \end{aligned}$$

(Las lineas punteadas significan que si f es mono y k es epi en el diagrama, entonces $\overline{f}$ y $\overline{k}$ son también mono y epi.) Esto se llama el **lema de la serpiente** porque el diagrama de arriba puede ser escrito como

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & \ker d' \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, tail, "i'"] & \ker d \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, tail, "i"] & \ker d'' \arrow[d, tail, "i''"] \arrow[dddll, rounded corners] & \\
0 \arrow[r, dashed] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d'"] & M \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "d"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, tail, "h"] \arrow[d, "p'"] & N \arrow[r, "k"] \arrow[d, "p"] & N'' \arrow[r, dashed] \arrow[d, "p''"] & 0 \\
 & \operatorname{coker} d' \arrow[r, "\overline{h}"] & \operatorname{coker} d \arrow[r, "\overline{k}"] & \operatorname{coker} d'' \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}
$$

La construcción del morfismo δ aparece en la película estadounidense "It's My Turn" (1980). Pueden ver esta parte en YouTube: http://www.youtube.com/watch?v=etbcKWEKnvg El nombre "diagrama de la serpiente" probablemente viene de Bourbaki ("diagramme du serpent" en francés).

4.2. Ejercicio. *No lea la demostración de abajo y demuestre el lema de la serpiente usted mismo: verifique que δ está bien definido y que la sucesión con núcleos y conúcleos es exacta.*

Demostración. La demostración usa el método conocido como la **caza de diagramas**. Antes de todo, demostremos la exactitud en las partes sin el morfismo misterioso δ.

<u>Exactitud en $0 \to \ker d' \xrightarrow{\overline{f}} \ker d$</u>. Si $f\colon M' \rightarrowtail M$ es un monomorfismo, entonces el morfismo inducido $\overline{f}\colon \ker d' \to \ker d$ es también un monomorfismo.

<u>Exactitud en $\operatorname{coker} d \xrightarrow{\overline{k}} \operatorname{coker} d'' \to 0$</u>. Si $k\colon N \twoheadrightarrow N''$ es un epimorfismo, entonces el morfismo inducido $\overline{k}\colon \operatorname{coker} d \to \operatorname{coker} d''$ es también un epimorfismo.

<u>Exactitud en $\ker d' \xrightarrow{\overline{f}} \ker d \xrightarrow{\overline{g}} \ker d''$</u>. Para ver que $\operatorname{im} \overline{f} \subseteq \ker \overline{g}$, tenemos que demostrar que $\overline{g} \circ \overline{f} = 0$. El morfismo i'' es mono, y entonces es suficiente demostrar que $i'' \circ \overline{g} \circ \overline{f} = 0$. Pero $i'' \circ \overline{g} \circ \overline{f} = \underbrace{g \circ f}_{0} \circ i' = 0$.

Para ver que $\ker \overline{g} \subseteq \operatorname{im} \overline{f}$, consideremos $x \in M$ tal que $d(x) = 0$ y $\overline{g}(x) = 0$. Entonces $g(x) = 0$ y por la exactitud de $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$, existe $x' \in M'$ tal $f(x') = x$. Ahora $h \circ d'(x') = d \circ f(x') = 0$ y h es mono, de donde $d'(x') = 0$ y $x' \in \ker d'$. Tenemos $x = \overline{f}(x')$.

<u>Exactitud en $\operatorname{coker} d' \xrightarrow{\overline{h}} \operatorname{coker} d \xrightarrow{\overline{k}} \operatorname{coker} d''$</u>. Primero, $\overline{k} \circ \overline{h} \circ p' = p'' \circ \underbrace{k \circ h} = 0$. Pero p' es epi, de donde $\overline{k} \circ \overline{h} = 0$ y por lo tanto $\operatorname{im} \overline{h} \subseteq \ker \overline{k}$. Veamos otra inclusión $\ker \overline{k} \subseteq \operatorname{im} \overline{h}$. El morfismo $\overline{k}$ está definido por $y + \operatorname{im} d \mapsto k(y) + \operatorname{im} d''$. Si tenemos $(y + \operatorname{im} d) \in \ker \overline{k}$, esto quiere decir que $k(y) \in \operatorname{im} d''$, por ejemplo $k(y) = d''(x'')$ para algún $x'' \in N''$. El morfismo g es sobreyectivo, de donde $x'' = g(x)$ para algún $x \in M$. Luego por la conmutatividad del diagrama

$$d'' \circ g(x) = k \circ d(x) = k(y) = d''(x'').$$

Entonces $k(d(x) - y) = 0$, y por la exactidud de $N' \xrightarrow{h} N \xrightarrow{k} N''$ tenemos $d(x) - y \in \operatorname{im} h$, por ejemplo $d(x) - y = h(y')$ para algún $y' \in N'$. En fin,

$$\overline{h}(y' + \operatorname{im} d') = h(y') + \operatorname{im} d = y + \operatorname{im} d.$$

Entonces $(y + \operatorname{im} d) \in \operatorname{im} \overline{h}$.

<u>El morfismo δ está bien definido</u>. Tenemos que ver que la definición

$$\begin{aligned}\delta\colon \ker d'' &\to \operatorname{coker} d',\\ x'' &\mapsto [h^{-1} \circ d \circ g^{-1}(x'')]\end{aligned}$$

tiene sentido. Aquí $x'' \in M''$ es un elemento tal que $d''(x'') = 0$. El morfismo g es sobreyectivo por nuestra hipótesis, y entonces podemos escoger un elemento $x \in M$ tal que $g(x) = x''$. Después apliquemos este elemento a $d(x) \in N$. Por la conmutatividad del diagrama, $k(d(x)) = d''(g(x)) = d''(x'') = 0$, de donde $d(x) \in \ker k$. Pero $\ker k = \operatorname{im} h$, y h es mono por nuestra hipótesis, y entonces existe un elemento único $y' \in N'$ tal que $h(y') = d(x)$. Finalmente, definimos $\delta(x'') := (y' + \operatorname{im} d') \in \operatorname{coker} d'$.

En la definición hay una elección arbitraria cuando escogemos un elemento $x \in g^{-1}(x'')$. Sean $x_1, x_2 \in M$ dos elementos diferentes tales que $g(x_1) = g(x_2) = x''$. Tenemos que ver que $h^{-1} \circ d(x_1) = h^{-1} \circ d(x_2) \pmod{\operatorname{im} d'}$, es decir $h^{-1}(d(x_1 - x_2)) \in \operatorname{im} d'$. De hecho $x_1 - x_2 \in \ker g$, de donde $x_1 - x_2 \in \operatorname{im} f$ por la exactitud de $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ y existe $x' \in M'$ tal que $f(x') = x_1 - x_2$. Ahora $h \circ d'(x') = d \circ f(x') = d(x_1 - x_2)$. Pero h es una aplicación inyectiva, así que $h^{-1}(d(x_1 - x_2)) = d'(x')$.

Entonces δ está bien definido, y se ve que es un morfismo R-lineal (en general, si tenemos un morfismo de R-módulos $f\colon M \to N$, entonces $f^{-1}(N_1 + r \cdot N_2) = f^{-1}(N_1) + r \cdot f^{-1}(N_2)$ para submódulos $N_1, N_2 \subseteq N$).

<u>Exactitud en $\ker d \xrightarrow{\overline{g}} \ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d'$</u>. Para ver que $\operatorname{im} \overline{g} \subseteq \ker \delta$, sea $x \in M$ tal que $d(x) = 0$. Entonces

$$\delta(\overline{g}(x)) = [h^{-1} \circ d \circ g^{-1} \circ g(x)] = [h^{-1} \circ d(x)] = 0.$$

Hay que ver que también $\ker \delta \subseteq \operatorname{im} \overline{g}$. Sea $x'' \in M''$ un elemento tal que $d''(x'') = 0$ y $\delta(x'') = 0$, es decir $h^{-1} \circ d \circ g^{-1}(x'') \in \operatorname{im} d'$. Sea $x' \in M'$ tal que $h^{-1} \circ d \circ g^{-1}(x'') = d'(x')$. Sea $x \in M$ tal que $g(x) = x''$. Tenemos $d(x) = h \circ d'(x') = d \circ f(x')$. Consideremos el elemento $x - f(x') \in M$. Tenemos $d(x - f(x')) = 0$ y $g(x - f(x')) = g(x) - \underbrace{g \circ f}_{0}(x') = g(x) = x''$. Entonces $x - f(x') \in \ker d$ es el elemento buscado con $\overline{g}(x - f(x')) = x''$.

<u>Exactitud en $\ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d' \xrightarrow{\overline{h}} \operatorname{coker} d$</u>. Para ver que $\operatorname{im} \delta \subseteq \ker \overline{h}$, sea para algún $x'' \in M''$ tal que $d''(x'') = 0$. Tenemos

$$\overline{h}(\delta(x'')) = h(h^{-1} \circ d \circ g^{-1}(x'')) + \operatorname{im} d = d \circ g^{-1}(x'') + \operatorname{im} d = 0 + \operatorname{im} d.$$

Tenemos que ver que también $\ker \overline{h} \subseteq \operatorname{im} \delta$. Si $(y' + \operatorname{im} d') \in \ker \overline{h}$, entonces $h(y') \in \operatorname{im} d$, digamos $h(y') = d(x)$ para algún $x \in M$. Luego, si tomamos $g(x) \in M''$, se ve que $g(x) \in \ker d''$, porque

$$d'' \circ g(x) = k \circ d(x) = \underbrace{k \circ h}_{0}(y') = 0,$$

y tenemos

$$\delta(g(x)) = [h^{-1} \circ d \circ g^{-1}(g(x))] = [h^{-1} \circ d(x)] = [y'].$$

■

En la demostración hemos usado la caza de diagramas, y a priori nuestro argumento no se aplica a todas categorías abelianas. Para otras demostraciones, más elegantes, véase [Kashiwara–Schapira], [Borceux, vol. II], o [Mac Lane].

4.3. Ejercicio. *De hecho, la sucesión exacta del lema de la serpiente es **natural**. Específicamente, si tenemos un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & M_1' \arrow[r] \arrow[d, "d_1'"'] \arrow[ddr] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "d"'] \arrow[ddr] & M_1'' \arrow[r] \arrow[d, "d_1''"'] \arrow[ddr] & 0 & \\
0 \arrow[r] & N_1' \arrow[r] \arrow[ddr] & N_1 \arrow[r] \arrow[ddr] & N_1'' \arrow[r, dashed] \arrow[ddr] & 0 & \\
& 0 \arrow[r, dashed] & M_2' \arrow[r] \arrow[d, "d_2'"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "d_2"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d_2''"] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & N_2' \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_2'' \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}$$

con filas exactas, entonces las sucesiones exactas correspondientes con ker *y* coker *forman un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & \ker d_1' \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_1 \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_1'' \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d] & \operatorname{coker} d_1' \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker} d_1 \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker} d_1'' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r, dashed] & \ker d_2' \arrow[r] & \ker d_2 \arrow[r] & \ker d_2'' \arrow[r, "\delta_2"] & \operatorname{coker} d_2' \arrow[r] & \operatorname{coker} d_2 \arrow[r] & \operatorname{coker} d_2'' \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd}$$