Álgebra homológica, día 8

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

17 de agosto de 2016

1. Lema del cinco

El lema de la serpiente nos va a ayudar a construir sucesiones exactas largas de cohomología en la siguiente sección. Ahora vamos a ver otros resultados relacionados.

1.1. Corolario (Lema del cinco corto). *Consideremos un diagrama con filas exactas*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d'"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "h"'] & N \arrow[r, "k"'] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(1) Si d' y d'' son monomorfismos, entonces d es también un monomorfismo.

(2) Si d' y d'' son epimorfismos, entonces d es también un epimorfismo.

(3) Si d' y d'' son isomorfismos, entonces d es también un isomorfismo.

Demostración. Obviamente (1) y (2) implican (3). Para demostrar (2) y (3), notamos que d' y d'' son monomorfismos (resp. epimorfismos) si y solamente si $\ker d' = \operatorname{coker} d'' = 0$ (resp. $\operatorname{coker} d' = \operatorname{coker} d'' = 0$). Entonces concluimos que $\ker d = 0$ (resp. $\operatorname{coker} d = 0$) gracias a la sucesión exacta

$$0 \to \ker d' \xrightarrow{\overline{f}} \ker d \xrightarrow{\overline{g}} \ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d' \xrightarrow{\overline{h}} \operatorname{coker} d \xrightarrow{\overline{k}} \operatorname{coker} d'' \to 0$$

■

El último resultado se llama el “lema del cinco corto” porque es una consecuencia del lema del cinco donde aparecen cinco morfismos:

1.2. Proposición (Lema del cinco). *Consideramos un diagrama conmutativo con filas exactas*

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "d_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "d_2"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "d_3"] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "d_4"] & M_5 \arrow[d, "d_5"] \\ N_1 \arrow[r, "g_1"'] & N_2 \arrow[r, "g_2"'] & N_3 \arrow[r, "g_3"'] & N_4 \arrow[r, "g_4"'] & N_5 \end{tikzcd}$$

(1) Si d_2 y d_4 son mono y d_1 es epi, entonces d_3 es mono.

(2) Si d_2 y d_4 son epi y d_5 es mono, entonces d_3 es epi.

(3) Si d_1 es epi, d_5 es mono y d_2, d_4 son isomorfismos, entonces d_3 es isomorfismo.

Notemos que el lema del cinco corto es el caso particular cuando $M_1 = M_5 = 0$.

Demostración. Obviamente, (1) y (2) implican (3). Para demostrar (1) y (2), podemos reducir la situación al lema del cinco corto considerando las factorizaciones epi-mono de f_2, f_3, g_2, g_3:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[ddd, "d_1"] & M_2 \arrow[rrr, "f_2"] \arrow[dr, two heads] \arrow[ddd, "d_2"] & & & M_3 \arrow[rrr, "f_3"] \arrow[dr, two heads] \arrow[ddd, "d_3"] & & & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[ddd, "d_4"] & M_5 \arrow[ddd, "d_5"] \\
& & \operatorname{coim} f_2 \arrow[r, phantom, "\cong"] & \operatorname{im} f_2 \arrow[ur, tail] \arrow[d, dashed, "\overline{d_2}"] & & \operatorname{coim} f_3 \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, dashed, "\overline{d_4}"] & \operatorname{im} f_3 \arrow[ur, tail] & & \\
& & \operatorname{coim} g_2 \arrow[r, phantom, "\cong"] & \operatorname{im} g_2 \arrow[dr, tail] & & \operatorname{coim} g_3 \arrow[r, phantom, "\cong"] & \operatorname{im} g_3 \arrow[dr, tail] & & \\
N_1 \arrow[r, "g_1"'] & N_2 \arrow[rrr, "g_2"'] \arrow[ur, two heads] & & & N_3 \arrow[rrr, "g_3"'] \arrow[ur, two heads] & & & N_4 \arrow[r, "g_4"'] & N_5
\end{tikzcd}$$

Las observaciones claves (que dejo como un ejercicio) son las siguientes:

- Si d_4 es mono, entonces $\overline{d_4}$ es mono.
- Si d_2 es epi, entonces $\overline{d_2}$ es epi.
- Si d_2 es mono y d_1 es epi, entonces $\overline{d_2}$ es mono.
- Si d_4 es epi y d_5 es mono, entonces el morfismo $\overline{d_4}$ es epi.

Después nos queda aplicar el lema del cinco corto al diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{im} f_2 \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d_2}"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "d_3"] & \operatorname{coim} f_3 \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d_4}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{im} g_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & \operatorname{coim} g_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

■

2. Sucesión exacta larga de cohomología

2.1. Teorema. *Cada sucesión exacta corta de complejos*

$$0 \to K^\bullet \xrightarrow{i^\bullet} M^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} N^\bullet \to 0$$

*induce de una manera natural una **sucesión exacta larga en cohomología***

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{n-1}(K^\bullet) \arrow[r] & H^{n-1}(M^\bullet) \arrow[r] & H^{n-1}(N^\bullet) \arrow[dll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-1ex]$(\tikztostart)!.5!(\tikztotarget)$) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] \\
& H^n(K^\bullet) \arrow[r] & H^n(M^\bullet) \arrow[r] & H^n(N^\bullet) \arrow[dll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-1ex]$(\tikztostart)!.5!(\tikztotarget)$) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] \\
& H^{n+1}(K^\bullet) \arrow[r] & H^{n+1}(M^\bullet) \arrow[r] & H^{n+1}(N^\bullet) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Aquí los morfismos $H^n(K^\bullet) \to H^n(M^\bullet) \to H^n(N^\bullet)$ son los inducidos por los morfismos $K^\bullet \to M^\bullet \to N^\bullet$ y los $H^n(N^\bullet) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(K^\bullet)$ son llamados **morfismos de conexión**.

Demostración. Recordamos la cohomología es dada por

$$H^n \cong \operatorname{coker}(\operatorname{im} d^{n-1} \rightarrowtail \ker d^n) \cong \operatorname{coker}(\operatorname{coker} d^{n-2} \twoheadrightarrow \operatorname{im} d^{n-1} \rightarrowtail \ker d^n)$$

o por

$$H^n \cong \ker(\operatorname{coker} d^{n-1} \twoheadrightarrow \operatorname{im} d^n) \cong \ker(\operatorname{coker} d^{n-1} \twoheadrightarrow \operatorname{im} d^n \rightarrowtail \ker d^{n+1}).$$

Entonces

$$H^n \cong \ker(\operatorname{coker} d^{n-1} \xrightarrow{\overline{d^n}} \ker d^{n+1}), \quad H^{n+1} \cong \operatorname{coker}(\operatorname{coker} d^{n-1} \xrightarrow{\overline{d^n}} \ker d^{n+1}).$$

Los morfismos $\overline{d^n}$ forman el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas (por la parte fácil del lema de la serpiente)

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{coker} d_K^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d_K^n}"'] & \operatorname{coker} d_M^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d_M^n}"'] & \operatorname{coker} d_N^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d_N^n}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker d_K^{n+1} \arrow[r] & \ker d_M^{n+1} \arrow[r] & \ker d_N^{n+1} &
\end{tikzcd}$$

El lema de la serpiente nos da entonces sucesiones exactas

$$\ker \overline{d_K^n} \to \ker \overline{d_M^n} \to \ker \overline{d_N^n} \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} \overline{d_K^n} \to \operatorname{coker} \overline{d_M^n} \to \operatorname{coker} \overline{d_N^n}$$

que son naturalmente isomorfas a las sucesiones exactas

$$H^n(K^\bullet) \to H^n(M^\bullet) \to H^n(N^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(K^\bullet) \to H^{n+1}(M^\bullet) \to H^{n+1}(N^\bullet)$$

Estas sucesiones para cada n dan la sucesión exacta larga buscada. ■

2.2. Ejercicio. *En el caso de los R-módulos, donde* $H^n \cong \ker d^n / \operatorname{im} d^{n-1}$*, describa la sucesión exacta en cohomología en términos de elementos.*

Como hemos observado, el lema de la serpiente produce sucesiones exactas naturales. Entonces, se puede ver que la sucesión exacta en cohomología es también natural: si tenemos un diagrama conmutativo de morfismos de complejos con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_1^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & M_1^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & N_1^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_2^\bullet \arrow[r] & M_2^\bullet \arrow[r] & N_2^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

entonces tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^n(K_1^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & H^n(M_1^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & H^n(N_1^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n+1}(K_1^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^n(K_2^\bullet) \arrow[r] & H^n(M_2^\bullet) \arrow[r] & H^n(N_2^\bullet) \arrow[r] & H^{n+1}(K_2^\bullet) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Todo esto quiere decir que los funtores $H^n \colon \mathbf{Com}^{\geq 0}(\mathbf{A}) \to \mathbf{A}$ forman un δ-funtor derecho.

3. Cono de un morfismo de complejos

A veces es útil cambiar la numeración de los elementos de un complejo:

3.1. Definición. Para un complejo $(M^\bullet, d^\bullet)$ el complejo correspondiente **desplazado por** p está definido por

$$(M^\bullet[p])^n := M^{n+p}, \quad d^n_{M^\bullet[p]} := (-1)^p \, d^{n+p}.$$

Para cada $[p]$ tenemos el funtor de desplazamiento $[p]\colon \mathbf{Com}(\mathbf{A}) \to \mathbf{Com}(\mathbf{A})$ definido por $M^\bullet \rightsquigarrow M^\bullet[p]$ y en morfismos $f^\bullet\colon M^\bullet \to N^\bullet$ por $(f^\bullet[p])^n := f^{n+p}$. Obviamente, $[q] \circ [p] = [p+q]$.

El cambio del signo de los diferenciales no tiene ningún significado profundo y sirve para simplificar la notación más adelante.

3.2. Observación. $H^n(M^\bullet[p]) = H^{n+p}(M^\bullet)$.

Ahora sea $f^\bullet\colon M^\bullet \to N^\bullet$ un morfismo de complejos. El **cono** de $f^\bullet$ es cierto complejo $C(f)$ que viene con morfismos naturales $N^\bullet \rightarrowtail C(f)$ y $C(f) \twoheadrightarrow M^\bullet[1]$, que forman una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \to N^\bullet \rightarrowtail C(f) \twoheadrightarrow M^\bullet[1] \to 0$$

Específicamente,

3.3. Definición. Para un morfismo de complejos $f^\bullet\colon M^\bullet \to N^\bullet$ su **cono** $C(f)$ está definido por

$$C(f)^n := N^n \oplus M^{n+1},$$

con diferenciales

$$C(f)^n := N^n \oplus M^{n+1} \xrightarrow{d^n_{C(f)} := \begin{pmatrix} d^n_N & f^{n+1} \\ 0 & -d^{n+1}_M \end{pmatrix}} C(f)^{n+1} := N^{n+1} \oplus M^{n+2}$$

En términos de elementos, para $x \in M^{n+1}$ e $y \in N^n$

$$d^n_{C(f)}(y,x) = \begin{pmatrix} d^n_N & f^{n+1} \\ 0 & -d^{n+1}_M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = (d^n_N(y) + f^{n+1}(x), \ -d^{n+1}_M(x)).$$

3.4. Observación. *De hecho, $C(f)$ es un complejo: tenemos $d^{n+1}_{C(f)} \circ d^n_{C(f)} = 0$ para cada n.*

Demostración. Verificación directa:

$$\begin{pmatrix} d^{n+1}_N & f^{n+2} \\ 0 & -d^{n+2}_M \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} d^n_N & f^{n+1} \\ 0 & -d^{n+1}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{n+1}_N \circ d^n_N & d^{n+1}_N \circ f^{n+1} - f^{n+2} \circ d^{n+1}_M \\ 0 & d^{n+2}_M \circ d^{n+1}_M \end{pmatrix},$$

y luego $d^{n+1}_N \circ d^n_N = 0$ y $d^{n+2}_M \circ d^{n+1}_M = 0$ porque $d^\bullet_N$ y $d^\bullet_M$ son diferenciales, y $d^{n+1}_N \circ f^{n+1} - f^{n+2} \circ d^{n+1}_M = 0$ porque $f^\bullet$ es un morfismo de complejos (conmuta con los $d^\bullet$). Noten que aquí nos sirvió el signo "$-$" que hemos puesto ante d^{n+1}_M. ∎

3.5. Ejemplo. Sea $\mathrm{id}\colon M^\bullet \to M^\bullet$ el morfismo identidad. ¿Qué es el cono $C(\mathrm{id})$?

Por la definición, es el complejo con objetos $C^n := M^n \oplus M^{n+1}$ y diferenciales $d^n := \begin{pmatrix} d^n & \mathrm{id}_{M^{n+1}} \\ 0 & -d^{n+1} \end{pmatrix}$. Es fácil comprobar que $C^\bullet$ es una sucesión exacta: es decir, $\operatorname{im} d^{n-1} = \ker d^n$, y por lo tanto $H^n(C^\bullet) = 0$. Pero también se puede ver que el complejo $C^\bullet$ no es solamente exacto, sino es homotópico a cero; es decir $\mathrm{id}_{C^\bullet} \simeq 0$: tenemos una familia de morfismos $h^n\colon C^n \to C^{n-1}$ tal que

$$\mathrm{id}_{Cn} = d^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d^n.$$

De hecho, podemos tomar los únicos morfismos evidentes

$$h^n := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{M^n} & 0 \end{pmatrix} : M^n \oplus M^{n+1} \to M^{n-1} \oplus M^n$$

(en términos de elementos, $(x, y) \mapsto (0, x)$). Luego tenemos

$$\begin{aligned} d^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d^n &= \begin{pmatrix} d^{n-1} & \mathrm{id}_{M^n} \\ 0 & -d^n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{M^n} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{id}_{M^{n+1}} & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} d^n & \mathrm{id}_{M^{n+1}} \\ 0 & -d^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{M^n} & 0 \\ -d^n & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d^n & \mathrm{id}_{M^{n+1}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{M^n} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{M^{n+1}} \end{pmatrix} = \mathrm{id}_{C^n}. \end{aligned}$$

▲

El termino “cono” viene de topología. Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua entre espacios topológicos, entonces su cono es el espacio topológico

$$C(f) := (X \times I) \cup_f Y,$$

que es formado de la manera siguiente: se considera la unión disjunta $(X \times I) \sqcup Y$ del cilindro $X \times I$ sobre X y el espacio Y. Luego cada punto $(x, 1) \in X \times I$ se identifica con $f(x) \in Y$, y los puntos $(x, 0) \in X \times I$ se contraen en un punto. Para espacios topológicos se puede considerar sus complejos singulares $C_\bullet(X)$, y de hecho $C_\bullet(C(f))$ va a ser el cono del morfismo de complejos $f_\bullet : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$.

Ahora el morfismo de complejos $i^\bullet : N^\bullet \rightarrowtail C(f)$ es simplemente definido por

$$i^n := \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{N^n} \\ 0 \end{pmatrix} : N^n \to N^n \oplus M^{n+1}$$

y el morfismo de complejos $p^\bullet : C(f) \twoheadrightarrow M^\bullet[1]$ está definido por

$$p^n := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{M^{n+1}} \end{pmatrix} : N^n \oplus M^{n+1} \to M^{n+1}.$$

3.6. Observación. *De hecho, $i^\bullet$ y $p^\bullet$ son morfismos de complejos que forman una sucesión exacta*

$$0 \to N^\bullet \rightarrowtail C(f) \twoheadrightarrow M^\bullet[1] \to 0$$

Demostración. Tenemos diagramas que son visiblemente conmutativos y tienen filas exactas:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N^n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "d_N^n"'] & N^n \oplus M^{n+1} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} d_N^n & f^{n+1} \\ 0 & -d_M^{n+1} \end{pmatrix}"] & M^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "-d_M^{n+1}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N^{n+1} \arrow[r, "i"'] & N^{n+1} \oplus M^{n+2} \arrow[r, "p"'] & M^{n+2} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(¡Por nuestra convención, el complejo desplazado $M^\bullet[1]$ tiene diferenciales $-d_M^\bullet$!) ■

3.7. Observación. *Cada morfismo de complejos $f^\bullet\colon M^\bullet \to N^\bullet$ induce una sucesión exacta larga en cohomología*

$$\cdots \to H^n(N^\bullet) \to H^n(C(f)) \to H^{n+1}(M^\bullet) \to H^{n+1}(N^\bullet) \to H^{n+1}(C(f)) \to \cdots$$

Demostración. Es simplemente la sucesión en cohomología asociada a la sucesión exacta corta de complejos

$$0 \to N^\bullet \rightarrowtail C(f) \twoheadrightarrow M^\bullet[1] \to 0$$

(recuerden que $H^n(M^\bullet[1]) = H^{n+1}(M^\bullet)$). ∎

3.8. Ejercicio. *Analice la construcción de los morfismos de conexión y verifique que en nuestro caso los morfismos de conexión $\delta^n\colon H^n(M^\bullet[1]) = H^{n+1}(M^\bullet) \to H^{n+1}(N^\bullet)$ son simplemente los morfismos en cohomología inducidos por $f^\bullet$.*

En particular, $f^\bullet$ es un cuasi-isomorfismo si y solamente si el complejo $C(f)$ es exacto (tiene cohomología trivial).

La construcción del cono respecta homotopías de complejos en el siguiente sentido.

3.9. Observación. *Supongamos que hay un diagrama de morfismos de complejos*

$$\begin{tikzcd} M_1^\bullet \arrow[r, "f_1^\bullet"] \arrow[d, "a^\bullet"'] & N_1^\bullet \arrow[d, "b^\bullet"] \\ M_2^\bullet \arrow[r, "f_2^\bullet"'] & N_2^\bullet \end{tikzcd}$$

*que es **homotópicamente conmutativo**, es decir $f_2^\bullet \circ a^\bullet \simeq b^\bullet \circ f_1^\bullet$. Entonces existe un morfismo de complejos $C(f_1) \to C(f_2)$ (definido a partir de una homotopía particular $h^n\colon M_1^n \to N_2^{n+1}$) tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N_1^\bullet \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "b^\bullet"'] & C(f_1) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, dashed] & M_1^\bullet[1] \arrow[r] \arrow[d, "a^\bullet[1]"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N_2^\bullet \arrow[r, "i_2"] & C(f_2) \arrow[r, "p_2"] & M_2^\bullet[1] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Demostración. Es algo obvio si el diagrama es conmutativo, es decir $f_2^\bullet \circ a^\bullet = b^\bullet \circ f_1^\bullet$: en este caso el morfismo buscado entre los conos está definido por $c^n := \begin{pmatrix} b^n & 0 \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}\colon N_1^n \oplus M_1^{n+1} \to N_2^n \oplus M_2^{n+1}$. En general hay que tomar en consideración la homotopía $f_2^\bullet \circ a^\bullet \simeq b^\bullet \circ f_1^\bullet$, que es una colección de morfismos $h^n\colon M_1^n \to N_2^{n+1}$ tales que para cada n

$$b^{n+1} \circ f_1^{n+1} - f_2^{n+1} \circ a^{n+1} = d_{N_2}^n \circ h^{n+1} + h^{n+2} \circ d_{M_1}^{n+1}.$$

Definimos el morfismo $c^\bullet\colon C(f_1) \to C(f_2)$ por la fórmula

$$c^n := \begin{pmatrix} b^n & h^{n+1} \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}\colon N_1^n \oplus M_1^{n+1} \to N_2^n \oplus M_2^{n+1}.$$

Verifiquemos que es un morfismo de complejos:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
N_1^n \oplus M_1^{n+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} d_{N_1}^n & f_1^{n+1} \\ 0 & -d_{M_1}^{n+1} \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} b^n & h^{n+1} \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}"'] & N_1^{n+1} \oplus M_1^{n+2} \arrow[d, "\begin{pmatrix} b^{n+1} & h^{n+2} \\ 0 & a^{n+2} \end{pmatrix}"] \\
N_2^n \oplus M_2^{n+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} d_{N_2}^n & f_2^{n+1} \\ 0 & -d_{M_2}^{n+1} \end{pmatrix}"'] & N_2^{n+1} \oplus M_2^{n+2}
\end{tikzcd}$$

De hecho,

$$\begin{pmatrix} d_{N_2}^n & f_2^{n+1} \\ 0 & -d_{M_2}^{n+1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b^n & h^{n+1} \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{N_2}^n \circ b^n & d_{N_2}^n \circ h^{n+1} + f_2^{n+1} \circ a^{n+1} \\ 0 & -d_{M_2}^{n+1} \circ a^{n+1} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} b^{n+1} & h^{n+2} \\ 0 & a^{n+2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} d_{N_1}^n & f_1^{n+1} \\ 0 & -d_{M_1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^{n+1} \circ d_{N_1}^n & b^{n+1} \circ f_1^{n+1} - h^{n+2} \circ d_{M_1}^{n+1} \\ 0 & -a^{n+2} \circ d_{M_1}^{n+1} \end{pmatrix}$$

Luego $d_{N_2}^n \circ b^n = b^{n+1} \circ d_{N_1}^n$ y $d_{M_2}^{n+1} \circ a^{n+1} = a^{n+2} \circ d_{M_1}^{n+1}$ porque $b^\bullet$ y $a^\bullet$ son morfismos de complejos y $d_{N_2}^n \circ h^{n+1} + f_2^{n+1} \circ a^{n+1} = b^{n+1} \circ f_1^{n+1} - h^{n+2} \circ d_{M_1}^{n+1}$ porque $h^\bullet$ es una homotopía. Y se ve que $c^\bullet \colon C(f_1) \to C(f_2)$ conmuta con los demás morfismos del diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N_1^\bullet \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "b^\bullet"'] & C(f_1) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "c^\bullet"'] & M_1^\bullet[1] \arrow[r] \arrow[d, "a^\bullet[1]"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_2^\bullet \arrow[r, "i_2"] & C(f_2) \arrow[r, "p_2"] & M_2^\bullet[1] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

■

Aquí está una variación de la construcción precedente:

3.10. Ejercicio. *Supongamos que tenemos complejos homotópicos $M_1^\bullet \simeq M_2^\bullet$ y $N_1^\bullet \simeq N_2^\bullet$. Esto quiere decir que hay algunos morfismos de complejos*

$$\begin{gathered} f_1^\bullet \colon M_1^\bullet \to M_2^\bullet, \\ f_2^\bullet \colon M_2^\bullet \to M_1^\bullet, \\ g_1^\bullet \colon N_1^\bullet \to N_2^\bullet, \\ g_2^\bullet \colon N_2^\bullet \to N_1^\bullet, \end{gathered}$$

tales que

(*) $$f_2^\bullet \circ f_1^\bullet \simeq \mathrm{id}_{M_1^\bullet},\ f_1^\bullet \circ f_2^\bullet \simeq \mathrm{id}_{M_2^\bullet}, \quad g_2^\bullet \circ g_1^\bullet \simeq \mathrm{id}_{N_1^\bullet},\ g_1^\bullet \circ g_2^\bullet \simeq \mathrm{id}_{N_2^\bullet}.$$

Construya una homotopía entre los complejos

$$C(M_1^\bullet \xrightarrow{f} N_1^\bullet)$$

y

$$C(M_2^\bullet \xrightarrow{f_2} M_1^\bullet \xrightarrow{f} N_1^\bullet \xrightarrow{g_1} N_2^\bullet).$$

Todo esto quiere decir que la construcción de conos está bien definida sobre clases de equivalencia de complejos módulo homotopía (pero no es canónica porque para hacer el ejercicio, hay que elegir homotopías particulares en (*)).

Un comentario importante para los lectores que quieran estudiar después las categorías derivadas.

A partir de la categoría de complejos $\mathbf{Com}(\mathbf{A})$ se puede construir la **categoría homotópica** $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ donde los objetos son complejos *módulo homotopía* y los morfismos son clases de equivalencia por homotopía de morfismos de complejos. La categoría $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ es aditiva pero no es abeliana. La construcción de conos sobre $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ es problemática ya que depende de homotopías particulares (¡haga el ejercicio de arriba!). Por esto los conos están bien definidos, pero no son funtoriales en la categoría $\mathbf{K}(\mathbf{A})$.