Álgebra homológica, día 9

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

18 de agosto de 2016

1. Objetos proyectivos y módulos proyectivos

1.1. Definición. Sea $\mathbf{A}$ una categoría abeliana. Se dice que un objeto P es **proyectivo** si P satisface una de las siguientes propiedades equivalentes:

1) Consideremos un epimorfismo $p\colon M \twoheadrightarrow N$ y cualquier morfismo $f\colon P \to N$. Entonces f "se extiende" a M (no necesariamente de modo único); es decir, existe un morfismo $\widetilde{f}\colon P \to M$ tal que $p \circ \widetilde{f} = f$:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\widetilde{f}"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, two heads] & N \end{tikzcd}$$

2) El funtor $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(P, -)\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Ab}$ es exacto. Es decir, si tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \to K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \to 0$$

entonces la sucesión correspondiente de grupos abelianos

$$0 \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(P, K) \xrightarrow{i_*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(P, M) \xrightarrow{p_*} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(P, N) \to 0$$

es también exacta.

3) Para cada epimorfismo $p\colon N \twoheadrightarrow P$ existe un isomorfismo $N \cong N' \oplus P$ tal que $p = p_P$.

Demostración de equivalencia de 1), 2), 3). El funtor $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(P, -)$ es exacto por la izquierda para cualquier $P \in \mathbf{A}$, y la condición 1) pide que $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(P, -)$ sea también exacto por la derecha. Entonces 1) y 2) son equivalentes.

Demostremos 1) $\Rightarrow$ 3). Si $p\colon N \twoheadrightarrow P$ es un epimorfismo, entonces tenemos un morfismo $i\colon P \to N$ tal que $p \circ i = \mathrm{id}_P$:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "i"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ N \arrow[r, two heads, "p"'] & P \end{tikzcd}$$

Sea $N' := \ker p$ con el morfismo canónico $i' \colon N' \rightarrowtail N$. Tenemos $p \circ (\mathrm{id}_N - i \circ p) = p - p \circ i \circ p = p - \mathrm{id}_P \circ p = 0$, entonces por la propiedad universal del núcleo existe un único morfismo $p' \colon N \to N'$ tal que $i' \circ p' = \mathrm{id}_N - i \circ p$:

$$\begin{tikzcd}
N' \arrow[r, tail, "i'"] & N \arrow[r, "p"] & P \\
N \arrow[u, dashed, "p'"] \arrow[ru, "\mathrm{id}_N - i\circ p"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ahora

$$i' \circ p' \circ i' = (\mathrm{id}_N - i \circ p) \circ i' = i' - i \circ \underbrace{p \circ i'}_{0} = i',$$

pero i' es un monomorfismo y por lo tanto

$$p' \circ i' = \mathrm{id}_{N'}.$$

También tenemos la identidad

$$i' \circ p' \circ i = (\mathrm{id}_N - i \circ p) \circ i = i - i \circ \underbrace{p \circ i}_{\mathrm{id}} = i - i = 0,$$

y entonces $p' \circ i = 0$. Resumamos la situación: tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
N' \arrow[r, shift right, "i'"'] & N \arrow[l, shift right, "p'"'] \arrow[r, shift left, "p"] & P \arrow[l, shift left, "i"]
\end{tikzcd}$$

cuyos morfismos satisfacen las identidades

$$p' \circ i' = \mathrm{id}_{N'},\ p \circ i = \mathrm{id}_P,\ p \circ i' = 0_{N'P},\ p' \circ i = 0_{PN'},\ i' \circ p' + i \circ p = \mathrm{id}_N$$

Esto quiere decir que N es isomorfo al biproducto $N' \oplus P$.

Ahora veamos la implicación 3) $\Rightarrow$ 1). Sea $p \colon M \twoheadrightarrow P$ algún epimorfismo y $f \colon P \to N$ otro morfismo. Tenemos que demostrar que existe $\widetilde{f} \colon P \to M$ tal que $p \circ \widetilde{f} = f$:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[ld, dashed, "\widetilde{f}"', "?"] \arrow[d, "f"] \\
M \arrow[r, two heads, "p"'] & N
\end{tikzcd}$$

La idea es considerar el producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & P \arrow[d, "f"] \\
M \arrow[r, two heads, "p"'] & N
\end{tikzcd}$$

A saber, es la misma cosa que tomar el núcleo K del morfismo $(p, -f) \colon M \oplus P \to N$. Sean $g \colon K \to M$ y $q \colon K \to P$ las composiciones de $K \rightarrowtail M \oplus P$ con los morfismos canónicos $p_M \colon M \oplus P \to M$ y $p_P \colon M \oplus P \to P$:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, tail] \arrow[rr, bend left, "g"] & M \oplus P \arrow[r, "p_M"] & M \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, tail] \arrow[rr, bend right, "q"'] & M \oplus P \arrow[r, "p_P"] & P \end{tikzcd}$$

Como un ejercicio, pueden verificar que tenemos una sucesión exacta

$$0 \to K \xrightarrow{\binom{g}{q}} M \oplus P \xrightarrow{(p,-f)} N$$

y en particular, $p \circ g = f \circ q$; luego, $q \colon K \twoheadrightarrow P$ es un epimorfismo porque p es un epimorfismo (pueden demostrarlo ustedes mismos o invocar la propiedad general que dice que en una categoría abeliana, los productos fibrados preservan epimorfismos). Luego, por la propiedad 3) existe un isomorfismo $K \cong K' \oplus P$ y un morfismo $i \colon P \to K$ tal que $q \circ i = \mathrm{id}_P$. Sea $\widetilde{f} := g \circ i$. Tenemos

$$p \circ \widetilde{f} = p \circ g \circ i = f \circ \underbrace{q \circ i}_{\mathrm{id}} = f.$$

■

1.2. Observación. *Si P_k es una familia de objetos proyectivos, entonces el coproducto $\bigoplus_k P_k$ es también un objeto proyectivo. En particular, si P y Q son proyectivos, entonces $P \oplus Q$ es proyectivo.*

Demostración. Tenemos el isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\bigoplus_k P_k, -) \cong \prod_k \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(P_k, -),$$

entonces si cada funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(P_k, -)$ es exacto, el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\bigoplus_k P_k, -)$ es también exacto. ■

1.3. Ejercicio. *Si tenemos una sucesión exacta*

$$0 \to P \to M \to Q \to 0$$

donde P y Q son proyectivos, entonces M es también proyectivo. En particular, $P \oplus Q$ es un objeto proyectivo si y solamente si P y Q son proyectivos.

1.4. Observación. *En la categoría R-**Mód** todos módulo libre es proyectivo.*

Demostración. Si $M = R\langle X \rangle$ es un módulo libre generado por algún conjunto X, entonces el funtor $\underline{\mathrm{Hom}}_R(R\langle X \rangle, -)$ es exacto porque tenemos una biyección natural

$$\mathrm{Hom}_R(R\langle X \rangle, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, M),$$

es decir

$$\underline{\mathrm{Hom}}_R(R\langle X \rangle, M) \cong \prod_{x \in X} M.$$

■

1.5. Ejemplo. Como ya sabemos, $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, -)$ no es exacto por la derecha, y en consecuencia $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo proyectivo. Esto implica que cada $\mathbb{Z}$-módulo *finitamente generado* es proyectivo si y solamente si es libre (= libre de torsión). Esta propiedad se cumple sobre cualquier dominio de ideales principales. ▲

1.6. Ejemplo. Sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, todo módulo es libre, y en particular proyectivo. ▲

1.7. Observación. *En general, los R-módulos proyectivos son precisamente los R-módulos **establemente libres**, es decir, los módulos P tales que $P \oplus Q$ es un R-módulo libre para algún R-módulo Q.*

Demostración. Si P es proyectivo, entonces podemos considerar un R-módulo libre F con epimorfismo $F \twoheadrightarrow P$, y por el criterio 3) de la definición $F \cong P \oplus Q$ para algún R-módulo Q.

Si $P \oplus Q$ es libre, en particular es proyectivo, y por lo tanto P y Q son libres. ■

1.8. Ejemplo. Para ver algún ejemplo fácil de un módulo proyectivo que no es libre, sea $R \times S$ el producto de dos anillos $R \neq 0, S \neq 0$. Entonces $R \times 0$ y $0 \times S$ son módulos proyectivos sobre $R \times S$, pero no son libres. Por ejemplo, sobre el anillo $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ el módulo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es proyectivo pero no es libre. ▲

1.9. Ejemplo. Sobre $\mathbb{Z}$ (o en general sobre cualquier dominio de ideales principales) cada submódulo de un módulo libre (¡no necesariamente finitamente generado!) es también libre. Entonces todos los grupos abelianos proyectivos deben ser libres. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ no es proyectivo porque no es libre sobre $\mathbb{Z}$ (en general, se ve que si $\mathbb{Q} = A \oplus B$, entonces $A = 0$ o $B = 0$). ▲

1.10. Ejercicio (Otro modo de ver que $\mathbb{Q}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo proyectivo). *Sea F el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por los números enteros positivos $[1], [2], [3], \ldots$ Consideremos el morfismo*

$$\begin{aligned} p\colon F &\twoheadrightarrow \mathbb{Q}, \\ [n] &\mapsto \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Es epi, pero tiene núcleo muy grande, porque $\mathbb{Q}$ tiene muchas relaciones entre sus elementos. Si $\mathbb{Q}$ fuera proyectivo, existiría una sección, es decir un morfismo $s\colon \mathbb{Q} \to F$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Q} \arrow[dl, dashed, "s"', "?"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ F \arrow[r, two heads, "p"'] & \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

Demuestre que esto es imposible porque no existe ningún morfismo no trivial $s\colon \mathbb{Q} \to F$.

1.11. Ejemplo. *Si R es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}$, entonces todo R-módulo proyectivo finitamente generado es automáticamente libre.* Esto es una consecuencia del llamado **lema de Nakayama**, que dice (en una de sus versiones) que *si $x_1, \ldots, x_n \in M$ son elementos de un R-módulo finitamente generado tales que $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n \in M/\mathfrak{m}M$ forman una base de $M/\mathfrak{m}M$ como un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K} := R/\mathfrak{m}$, entonces $x_1, \ldots, x_n$ son generadores de M como un R-módulo.*

Si P es un R-módulo proyectivo finitamente generado, tenemos $P \oplus Q \cong R^n$ para algún n y algún R-módulo Q. En particular, tenemos $P/\mathfrak{m}P \oplus Q/\mathfrak{m}Q \cong \mathbb{K}^n$ y podemos escoger bases $\{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_p\}$ y $\{\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_q\}$ de los espacios vectoriales $P/\mathfrak{m}P$ y $Q/\mathfrak{m}Q$ (tenemos $p + q = n$). El lema de Nakayama nos dice que $\{x_1, \ldots, x_p\}$ y $\{y_1, \ldots, y_q\}$ son generadores de P y Q como R-módulos. Por fin, se ve que $\{x_1, \ldots, x_p\}$ y $\{y_1, \ldots, y_q\}$ son R-linealmente independientes, entonces forman bases de P y Q como R-módulos libres.

Por ejemplo, podemos considerar la matriz de $n \times n$ con columnas formadas por las coordenadas de los vectores $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q$ respecto a una base de F:

$$M := \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{p1} & y_{11} & \cdots & y_{q1} \\ x_{12} & \cdots & x_{p2} & y_{12} & \cdots & y_{q2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & \cdots & x_{pn} & y_{1n} & \cdots & y_{qn} \end{pmatrix}$$

Después de la reducción módulo $\mathfrak{m}$, la matriz correspondiente $\overline{M}$ está formada por vectores de una base de $\mathbb{K}^n$. Se sigue que $\det_{\mathbb{K}}(\overline{M}) \neq 0$, es decir, $\det_R(M) \notin \mathfrak{m}$ y por lo tanto $\det_R(M) \in R^\times$. Esto quiere decir que la matriz M es invertible sobre R, y entonces corresponde a una aplicación R-lineal $\phi\colon R^n \to R^n$ con $\ker(\phi) = 0$. Esto quiere decir que entre los vectores columna no hay relaciones R-lineales.

En general, hay un teorema complicado de Kaplansky que dice que *todo* módulo proyectivo sobre un anillo local es libre (*Irving Kaplansky, "Projective Modules". The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 68, No. 2 (Sep., 1958), pp. 372–377*). ▲

1.12. Observación. *Si P_1 y P_2 son R-módulos proyectivos, entonces $P_1 \otimes_R P_2$ es también proyectivo.*

Demostración.

1) Tenemos $P_1 \oplus Q_1 \cong F_1$ y $P_2 \oplus Q_2 \cong F_2$ para algunos R-módulos libres F_1 y F_2. Luego,

$$(P_1 \oplus Q_1) \otimes_R (P_2 \oplus Q_2) \cong (P_1 \otimes_R P_2) \oplus (P_1 \otimes_R Q_2) \oplus (Q_1 \otimes_R P_2) \oplus (Q_1 \otimes_R Q_2) \cong F_1 \otimes_R F_2$$

es también un R-módulo libre, entonces $P_1 \otimes_R P_2$ es proyectivo.

2) Para otra demostración más elegante, consideramos el funtor $\operatorname{Hom}_R(P_1 \otimes_R P_2, -)\colon R\textbf{-Mód} \to \textbf{Ab}$. Tenemos un isomorfismo de funtores

$$\operatorname{Hom}_R(P_1 \otimes_R P_2, -) \cong \operatorname{Hom}_R(P_1, \underline{\operatorname{Hom}}_R(P_2, -)),$$

que proviene de la adjunción entre $- \otimes_R P_2$ y $\underline{\operatorname{Hom}}_R(P_2, -)$. A la derecha tenemos la composición de dos funtores $\underline{\operatorname{Hom}}_R(P_2, -)\colon R\textbf{-Mód} \to R\textbf{-Mód}$ y $\operatorname{Hom}_R(P_1, -)\colon R\textbf{-Mód} \to \textbf{Ab}$, y ambos son exactos puesto que P_1 y P_2 son R-módulos proyectivos. Entonces el funtor $\operatorname{Hom}_R(P_1 \otimes_R P_2, -)$ es exacto.

■

2. Objetos inyectivos y módulos inyectivos

2.1. Definición. Sea $\mathbf{A}$ una categoría abeliana. Se dice que un objeto I es **inyectivo** si I satisface una de las siguientes propiedades equivalentes:

1) Consideremos un monomorfismo $M \rightarrowtail N$ y cualquier morfismo $f\colon M \to I$. Entonces f "se extiende" a $\widetilde{f}\colon N \to I$ (no necesariamente de modo único):

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[dl, dashed, "\widetilde{f}"] \\ I & \end{tikzcd}$$

2) El funtor (contravariante) $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-, I)\colon \mathbf{A}^\circ \to \mathbf{Ab}$ es exacto. Es decir, si tenemos una sucesión exacta corta
$$0 \to K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \to 0$$
entonces la sucesión correspondiente de grupos abelianos
$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(N, I) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, I) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(K, I) \to 0$$
es también exacta.

3) Para cada monomorfismo $i\colon I \rightarrowtail N$ existe un isomorfismo $N \cong N' \oplus I$ tal que $i = i_I$.

Las condiciones 1) y 2) son equivalentes porque el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-, I)$ es automáticamente exacto por la izquierda. Notamos que estas propiedades son duales a las propiedades que definen a los módulos proyectivos (1.1): hemos cambiado la dirección de las flechas, epimorfismos por monomorfismos, etc.:

2.2. Observación. *Los objetos proyectivos (resp. inyectivos) en* $\mathbf{A}$ *son precisamente los objetos inyectivos (resp. proyectivos) en* $\mathbf{A}^\circ$.

Entonces la demostración de equivalencia 1) y 3) es similar a la misma demostración para los objetos proyectivos.

2.3. Observación. *Si* I_k *es una familia de productos inyectivos, entonces* $\prod_k I_k$ *es también inyectivo. En particular, si* I *y* J *son inyectivos, entonces* $I \oplus J$ *es inyectivo.*

Demostración. Tenemos un isomorfismo natural
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-, \prod_k I_k) \cong \prod_k \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-, I_k),$$
entonces si cada funtor $\mathrm{Hom}_R(-, I_k)$ es exacto, el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-, \prod_k I_k)$ es también exacto. ∎

2.4. Ejercicio. *Si tenemos una sucesión exacta*
$$0 \to I \to M \to J \to 0$$
donde I *y* J *son inyectivos, entonces* M *es también inyectivo.*

2.5. Ejercicio. *Si* $I \oplus J$ *es un objeto inyectivo, entonces* I *y* J *son inyectivos.*

2.6. Ejemplo. Para la categoría $\mathbb{K}$-**Mód** $=$ $\mathbb{K}$-**Vect** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ la propiedad 3) es obvia: si tenemos un subespacio vectorial $U \subset V$, entonces, tal y como se estudia en los cursos de álgebra lineal, siempre existe otro subespacio $U^\perp$ tal que $U^\perp + U = V$ y $U^\perp \cap U = \{0\}$. Esto quiere decir que sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ todos los módulos son inyectivos (y, como hemos visto arriba, proyectivos). Por ello el álgebra homológica sobre un cuerpo no es interesante. ▲

2.7. Ejemplo. En general, los R-módulos libres no son inyectivos. Por ejemplo, el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$ no es exacto. ▲

El grupo abeliano $\mathbb{Z}$ no es inyectivo porque no es divisible:

2.8. Definición. Se dice que un R-módulo M es **divisible** si para cada $r \in R$, $r \neq 0$ y para cada $x \in M$ existe $y \in M$ tal que $r \cdot y = x$. Es decir, el morfismo de multiplicación por $r \neq 0$ es un epimorfismo $M \twoheadrightarrow M$.

2.9. Observación. *Todo* R*-módulo inyectivo* I *es necesariamente divisible.*

Demostración. Para $r \in R$, $r \neq 0$ consideremos el ideal $(r) \subset R$ generado por r. Sea $f\colon (r) \to I$ el morfismo R-lineal definido por $r \mapsto x$. Si I es inyectivo, entonces f se extiende a $\widetilde{f}\colon R \to I$. El último morfismo está definido por su valor $y := \widetilde{f}(1)$. Luego, tenemos $x = f(r) = \widetilde{f}(r \cdot 1) = r \cdot y$.

$$\begin{tikzcd} (r) \arrow[r, tail] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "\widetilde{f}"] \\ I & \end{tikzcd}$$

■

Sobre $\mathbb{Z}$, o en general cualquier dominio de ideales principales, los módulos inyectivos son precisamente divisibles. Para verlo, nos sirve otra caracterización de R-módulos inyectivos:

2.10. Observación (Criterio de Baer). *Un R-módulo I es inyectivo si y solamente si para cada ideal $\mathfrak{a} \subset R$ todo morfismo R-lineal $f\colon \mathfrak{a} \to R$ puede ser extendido a un morfismo $\widetilde{f}\colon R \to I$.*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{a} \arrow[r, tail] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "\widetilde{f}"] \\ I & \end{tikzcd}$$

Demostración. La propiedad de arriba es un caso particular de la definición de inyectividad de I. Lo que tenemos que demostrar es que esta propiedad es suficiente para demostrar que para cualquier submódulo $M \subset N$ un morfismo R-lineal $f\colon M \to I$ se extiende a $\widetilde{f}\colon N \to I$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[dl, dashed, "\widetilde{f}"] \\ I & \end{tikzcd}$$

Consideremos todos los pares

$$(M',\ f'\colon M' \to I) \quad \text{tal que } M \subseteq M' \subseteq N,\ f = f'|_M .$$

Tenemos un orden sobre este conjunto dado por

$$(M', f') \preceq (M'', f'') \iff M' \subseteq M'' \text{ y } f''|_{M'} = f'.$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail] \arrow[d, "f"'] & M' \arrow[r, tail] \arrow[dl, "f'"'] & M'' \arrow[r, tail] \arrow[dll, "f''"'] & N \\ I & & & \end{tikzcd}$$

Por el lema de Zorn (!) entre estos pares existe un elemento maximal (M', f'). Para terminar la demostración, tenemos que ver que $M' = N$. De hecho, supongamos que existe algún elemento $x \in N \setminus M'$. Sea

$$\mathfrak{a} := \{r \in R \mid r \cdot x \in M'\}.$$

Este es un ideal en R, y entonces podemos aplicar la propiedad de nuestra hipótesis a $\mathfrak{a}$. Consideremos el morfismo de R-módulos

$$\begin{aligned} g\colon \mathfrak{a} &\to I, \\ r &\mapsto f'(r \cdot x). \end{aligned}$$

Este morfismo se extiende a un morfismo R-lineal $\widetilde{g}\colon R \to I$:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{a} \arrow[r, tail] \arrow[d, "g"'] & R \arrow[dl, dashed, "\widetilde{g}"] \\ I & \end{tikzcd}$$

Ahora consideremos el R-módulo

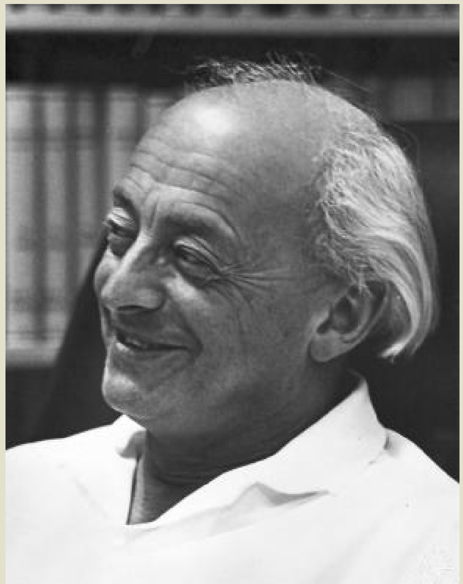
$$M'' := M' + R\,\langle x \rangle\,, \quad M' \subsetneq M'' \subseteq N.$$

Tenemos un morfismo R-lineal

$$\begin{aligned} f''\colon M'' := M' + R\,\langle x \rangle &\to I, \\ y + r \cdot x &\mapsto \widetilde{g}(r) + f'(y). \end{aligned}$$

Se ve que este morfismo está definido correctamente, y que $f''|_{M'} = f'$. Por tanto $(M', f') \prec (M'', f'')$. Contradicción. ■

Reinhold Baer (1902–1979) fue un matemático alemán conocido principalmente por sus contribuciones en teoría de grupos, en particular grupos abelianos.



Obtuvo su doctorado en la Universidad de Gotinga bajo la dirección de Hellmuth Kneser y Richard Courant. En 1926–1928 tuvo una posición en Freiburg, donde en particular trabajaba Wolfgang Krull (famoso por sus resultados en el álgebra conmutativa). En 1928 fue invitado por Helmut Hasse (otro famoso algebrista y, a propósito, un simpatizante del partido nazi) a la Universidad de Halle, donde trabajó hasta 1933, año en el cual fue despedido por sus orígenes judíos. Hasse le consiguió una invitación a la Universidad de Manchester, y así pasó 1933–35 en Inglaterra, antes de mudarse a los Estados Unidos, donde tuvo posiciones en el *Institute for Advanced Study* y la Universidad de Illinois en Urbana-Champaign. Después de la guerra, trató de volver a Alemania y en 1956 consiguió una plaza en Fráncfort del Meno.

El concepto de R-módulo inyectivo y el criterio de arriba viene del artículo

> R. Baer, Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group, Bull AMS (1940), 800–806. http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183503234

El término "inyectivo" probablemente apareció por primera vez en las exposiciones de Eilenberg para el *Séminaire Henri Cartan* 1950–1951 ("Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux"). El concepto dual de R-módulo proyectivo fue introducido por Cartan y Eilenberg en su libro de texto (publicado en 1956).

2.11. Corolario. *Sobre un dominio de ideales principales R cada R-módulo divisible I es inyectivo.*

En particular, todo grupo abeliano divisible A (tal que para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$ y cada $x \in A$ existe $y \in A$ tal que $n\,y = x$), es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

Demostración. Cada ideal de R es de la forma (r) para algún $r \in R$ y tenemos que ver la propiedad

$$\begin{tikzcd}
(r) \arrow[r, tail] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "?"', "\widetilde{f}"] \\
I &
\end{tikzcd}$$

El caso $r = 0$ es trivial: tenemos el morfismo cero $f\colon 0 \to I$ y su extensión es el morfismo cero $R \to I$. Podemos suponer que $r \neq 0$.

(r) es un R-módulo libre generado por r, entonces cada morfismo $f\colon (r) \to I$ está definido por $x = f(r) \in I$. Para extender f a $\widetilde{f}\colon R \to I$ es suficiente encontrar un elemento $y = \widetilde{f}(1) \in I$ tal que $r \cdot y = x$, lo cual es posible ya que I es divisible. ■

2.12. Ejemplo. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ son grupos abelianos divisibles, y por lo tanto $\mathbb{Z}$-módulos inyectivos. ▲