Teoremas de coeficientes universales

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

24 de agosto de 2016

1. Complejo singular en topología algebraica

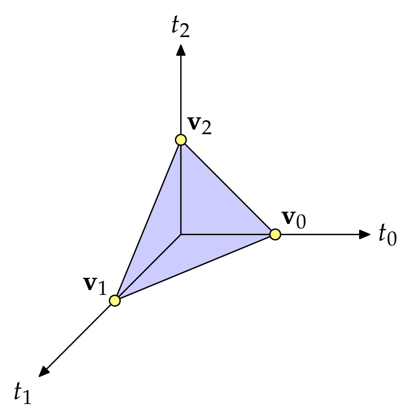
Ahora vamos a ver las definiciones de la **homología** $H_n(X)$ y **cohomología** $H^n(X)$ **singular** de un espacio topológico X. Mi objetivo es simplemente explicar las nociones de homotopías entre morfismos de complejos: la motivación y terminología vienen de topología algebraica. El lector interesado puede consultar el libro "A Concise Course in Algebraic Topology" de J.P. May.

1.1. Definición. El **símplice geométrico** de dimensión n es el subespacio $|\Delta^n|$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ que es la envolvente convexa de los $n+1$ vértices

$$\mathbf{v}_0 := (1,0,0\ldots,0),\ \mathbf{v}_1 := (0,1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ \mathbf{v}_n := (0,0,0,\ldots,1).$$

Es decir,

$$|\Delta^n| := \operatorname{conv}\{\mathbf{v}_0,\ \ldots,\mathbf{v}_n\} = \{t_0\,\mathbf{v}_0 + \cdots + t_n\,\mathbf{v}_n \mid t_i \ge 0,\ \sum_i t_i = 1\}.$$



El 2-símplice en $\mathbb{R}^3$

El símplice $|\Delta^n|$ tiene $n+1$ caras que se identifican con símplices $|\Delta^{n-1}|$. A saber, para $i = 0,\ldots,n$ tenemos aplicaciones afines

$$\partial_i\colon |\Delta^{n-1}| \to |\Delta^n|$$

definidas por sus valores en los vértices

$$\partial_i(\mathbf{v}_k) := \begin{cases} \mathbf{v}_k, & k < i, \\ \mathbf{v}_{k+1}, & k \ge i. \end{cases}$$

específicamente, ponemos $\partial_i(\sum_{0\le j\le n-1} t_j\,\mathbf{v}_j) := \sum_{0\le j\le n-1} t_j\,\partial_i(\mathbf{v}_j))$.

1.2. Observación (Identidad simplicial). *Tenemos* $\partial_i \circ \partial_j = \partial_{j-1} \circ \partial_i$ *para* $i < j$.

1.3. Definición. Sea X un espacio topológico. Un **símplice singular** en X de dimensión n es una aplicación continua $u\colon |\Delta^n| \to X$. Sea $\operatorname{Sing}(X)_n$ el conjunto de todos símplices singulares de dimensión n:

$$\operatorname{Sing}(X)_n := \operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}(|\Delta^n|, X).$$

Para $i = 0, \ldots, n$, la ***i*-ésima cara** de $u\colon |\Delta^n| \to X$ es el símplice singular $u \circ \partial_i\colon |\Delta^{n-1}| \to |\Delta^n| \to X$. Es exactamente la restricción de u a la i-ésima cara de $|\Delta^n|$, y podemos usar la notación

$$u \circ \partial_i =: u|[\mathbf{v}_0, \ldots, \widehat{\mathbf{v}}_i, \ldots, \mathbf{v}_n].$$

Esto nos da $n+1$ **operadores de caras**, que por abuso de notación podemos denotar también por ∂_i:

$$\begin{aligned} \partial_i\colon \operatorname{Sing}(X)_n &\to \operatorname{Sing}(X)_{n-1}, \\ u &\mapsto u|[\mathbf{v}_0, \ldots, \widehat{\mathbf{v}}_i, \ldots, \mathbf{v}_n]. \end{aligned}$$

El **complejo singular** $C_\bullet(X)$ consiste en cada grado n del grupo abeliano libre generado por los elementos de $\operatorname{Sing}(X)_n$:

$$C_n(X) := \mathbb{Z}\left\langle \operatorname{Sing}(X)_n \right\rangle.$$

Y los diferenciales $d_n\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ están definidos por linealidad mediante la fórmula

$$d_n := \sum_{0 \le i \le n} (-1)^i \, \partial_i.$$

$$C_\bullet(X)\colon \quad \cdots \to C_3(X) \xrightarrow{d_3} C_2(X) \xrightarrow{d_2} C_1(X) \xrightarrow{d_1} C_0(X) \to 0 \to \cdots$$

1.4. Observación. $d_{n-1} \circ d_n = 0$ *para todo* n*; es decir,* $C_\bullet(X)$ *es un complejo.*

Demostración. La identidad de 1.2 para las aplicaciones $\partial_i\colon |\Delta^{n-1}| \to |\Delta^n|$ implica que los operadores de caras $\partial_i\colon \operatorname{Sing}(X)_n \to \operatorname{Sing}(X)_{n-1}$ también satisfacen la identidad

$$\partial_i \circ \partial_j = \partial_{j-1} \circ \partial_i \quad \text{para } i < j. \tag{*}$$

Luego, podemos escribir

$$d_{n-1} \circ d_n = \sum_{\substack{0 \le i \le n-1 \\ 0 \le j \le n}} (-1)^{i+j} \, \partial_i \circ \partial_j = \sum_{0 \le i < j \le n} (-1)^{i+j} \, \partial_i \circ \partial_j + \sum_{0 \le j \le i \le n-1} (-1)^{i+j} \, \partial_i \circ \partial_j$$

y gracias a (*),

$$\sum_{0 \le i < j \le n} (-1)^{i+j} \, \partial_{j-1} \circ \partial_i + \sum_{0 \le j \le i \le n-1} (-1)^{i+j} \, \partial_i \circ \partial_j.$$

Cambiando el índice de la primera suma por $j-1$, obtenemos

$$-\sum_{0 \le i \le j \le n-1} (-1)^{i+j} \, \partial_j \circ \partial_i + \sum_{0 \le j \le i \le n-1} (-1)^{i+j} \, \partial_i \circ \partial_j = 0.$$

∎

1.5. Definición. La homología del complejo singular $C_\bullet(X)$ se llama la **homología singular de** X:

$$H_n(X) := H_n(C_\bullet(X)).$$

Hemos demostrado que en general, si ∂_i son algunos morfismos $C_n \to C_{n-1}$ que satisfacen la identidad

$$(*) \qquad \partial_i \circ \partial_j = \partial_{j-1} \circ \partial_i \quad \text{para } i < j,$$

entonces la fórmula $\sum_{1 \le i \le k} (-1)^{i+1} \partial_i$ define un diferencial del complejo $C_\bullet$. En topología algebraica todos los diferenciales que se construyen de modo explícito tienen esta forma (el complejo singular, complejo de Čech, etc.). La identidad (*) es una de las **identidades simpliciales**. La colección de conjuntos $\operatorname{Sing}(X)_n$ para $n \ge 0$ forma una estructura que se llama un **conjunto simplicial**. Para mayor información sobre conjuntos simpliciales, véase el libro "Simplicial homotopy theory" de P. Goerss y R. Jardine.

El complejo singular $C_\bullet(X)$ tiene importancia teórica, pero no permite hacer cálculos explícitos para espacios particulares X: hay una cantidad enorme de aplicaciones continuas $|\Delta^n| \to X$, y el grupo abeliano libre que tiene todas estas aplicaciones como sus generadores es algo monstruoso. Pero si X es un espacio razonable, cuando se calcula la homología $\ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1}$, este cociente de grupos monstruosos se vuelve un grupo finitamente generado. Casi el único cálculo explícito que se puede hacer con homología singular es el de la homología del punto:

1.6. Ejemplo. Si X es un punto $*$, entonces en cada grado n hay una aplicación $|\Delta^n| \to *$ y en el complejo singular $C_n(X) \cong \mathbb{Z}$ para todo n. Los operadores $\partial_i\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ coinciden con $\mathrm{id}_\mathbb{Z}$, y las sumas alternadas $\sum_{0 \le i \le n} (-1)^i \partial_i$ deben son 0 si n es impar y id si n es par. Entonces el complejo es

$$\cdots \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$

El único grupo de homología no trivial es

$$H_0(*) \cong \mathbb{Z}.$$

▲

1.7. Observación. *El complejo singular $C_\bullet(-)$ es un funtor entre la categoría de espacios topológicos y la categoría de complejos de grupos abelianos (con numeración homológica). Es decir, una aplicación continua entre espacios topológicos $f\colon X \to Y$ induce de modo funtorial un morfismo entre complejos $f_\#\colon C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$.*

Demostración. $\operatorname{Sing}(-)_n := \operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}(|\Delta^n|, -)$ es un funtor covariante $\mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$. Una aplicación continua $f\colon X \to Y$ induce una aplicación entre conjuntos

$$f \circ -\colon \operatorname{Sing}(X)_n \to \operatorname{Sing}(Y)_n,$$

y luego una aplicación entre los grupos abelianos libres correspondientes:

$$f_{\#n}\colon \mathbb{Z}\left\langle \operatorname{Sing}(X)_n \right\rangle \to \mathbb{Z}\left\langle \operatorname{Sing}(Y)_n \right\rangle.$$

Está claro que los $f_{\#n}$ conmutan con los diferenciales:

$$\begin{tikzcd} C_n(X) \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_{\#n}"'] & C_{n-1}(X) \arrow[d, "f_{\#,n-1}"] \\ C_n(Y) \arrow[r, "d_n"'] & C_{n-1}(Y) \end{tikzcd}$$

$$
\begin{aligned}
d_n \circ f_{\#n}(u) &= \sum_{0\le i\le n} (-1)^i\,(f\circ u)|[\mathbf{v}_0,\dots,\widehat{\mathbf{v}}_i,\dots,\mathbf{v}_n] \\
&= \sum_{0\le i\le n} (-1)^i\, f\circ (u|[\mathbf{v}_0,\dots,\widehat{\mathbf{v}}_i,\dots,\mathbf{v}_n]) \\
&= \sum_{0\le i\le n} (-1)^i\, f_{\#,n-1}(u|[\mathbf{v}_0,\dots,\widehat{\mathbf{v}}_i,\dots,\mathbf{v}_n]) \\
&= f_{\#,n-1}\left(\sum_{0\le i\le n} (-1)^i\, u|[\mathbf{v}_0,\dots,\widehat{\mathbf{v}}_i,\dots,\mathbf{v}_n]\right) = f_{\#,n-1}\circ d_n(u).
\end{aligned}
$$

∎

Los morfismos entre complejos $f_\#\colon C_\bullet(X)\to C_\bullet(Y)$ inducen de modo funtorial morfismos entre grupos de homología $f_{n*}\colon H_n(X)\to H_n(Y)$, y por lo tanto tenemos el siguiente

1.8. Corolario. *$H_n(-)$ son funtores* **Top** $\to$ **Ab**.

Ahora podemos explicar el término "homotopía de complejos":

1.9. Observación. *Supongamos que $f,g\colon X\to Y$ son dos aplicaciones continuas que son homotópicas, en el sentido de que existe una función continua $H\colon X\times[0,1]\to Y$ tal que $H(x,0)=f(x)$ y $H(x,1)=g(x)$ para todo $x\in X$.*

Entonces f y g inducen aplicaciones homotópicas entre complejos

$$f_\#, g_\#\colon C_\bullet(X)\to C_\bullet(Y)$$

en el sentido de que existe una familia de morfismos

$$h_n\colon C_n(X)\to C_{n+1}(Y)$$

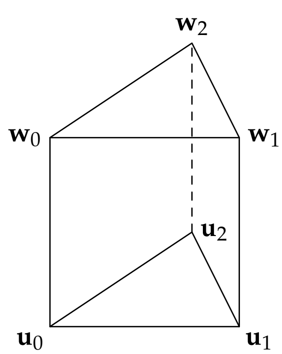
que satisfacen la identidad

$$g_{\#n}-f_{\#n}=h_{n-1}\circ d_n+d_{n+1}\circ h_n.$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(X) \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n(X) \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, shift right, "f_{\#n}"'] \arrow[d, shift left, "g_{\#n}"] & C_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(Y) \arrow[r, "d_{n+1}"'] & C_n(Y) \arrow[r, "d_n"'] & C_{n-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Podemos considerar $|\Delta^n|\times[0,1]$ como un prisma en $\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}$ con vértices

$$\mathbf{u}_0:=(\mathbf{v}_0,0),\ \dots,\ \mathbf{u}_n:=(\mathbf{v}_n,0),\ \mathbf{w}_0:=(\mathbf{v}_0,1),\ \dots,\ \mathbf{w}_n:=(\mathbf{v}_n,1)$$



Para $n+2$ vértices $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n+1}$ sea $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n+1}]$ el símplice afín $|\Delta^{n+1}| \to |\Delta^n| \times [0,1]$ definido por $\mathbf{v}_i \mapsto \mathbf{x}_i$. Un símplice singular $u\colon |\Delta^n| \to X$ define una aplicación

$$H \circ (u \times \mathrm{id}_{[0,1]})\colon |\Delta^n| \times [0,1] \to X \times I \to Y,$$

usando el cual se puede definir una aplicación

$$\begin{aligned} h_n\colon C_n(X) &\to C_{n+1}(Y), \\ u &\mapsto \sum_{0 \le i \le n} (-1)^i \, H \circ (u \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ [\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{w}_n] \end{aligned}$$

(aquí $u \in \mathrm{Sing}(X)_n$ es un elemento de la base de $C_n(X)$, y luego h_n se define por linealidad). Luego, se calcula

$$\begin{aligned} d_{n+1} \circ h_n(u) &= \sum_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 \le j \le n+1}} (-1)^i \, (-1)^j \, H \circ (u \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ [\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{w}_n] \circ \partial_j \\ &= \sum_{0 \le j \le i \le n} (-1)^i \, (-1)^j \, H \circ (u \times \mathrm{id}_{[0,1]}) | [\mathbf{u}_0, \dots, \widehat{\mathbf{u}_j}, \dots, \mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{w}_n] + \\ &\qquad \sum_{0 \le i < j \le n+1} (-1)^i \, (-1)^j \, H \circ (u \times \mathrm{id}_{[0,1]}) | [\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i, \dots, \widehat{\mathbf{w}_{j-1}}, \dots, \mathbf{w}_n] \\ &= \sum_{0 \le j \le i \le n} (-1)^i \, (-1)^j \, H \circ (u \times \mathrm{id}_{[0,1]}) | [\mathbf{u}_0, \dots, \widehat{\mathbf{u}_j}, \dots, \mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{w}_n] + \\ &\qquad \sum_{0 \le i \le j \le n} (-1)^i \, (-1)^{j+1} \, H \circ (u \times \mathrm{id}_{[0,1]}) | [\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i, \dots, \widehat{\mathbf{w}_j}, \dots, \mathbf{w}_n]. \end{aligned}$$

Notemos que los términos con $i = j$ se cancelan, excepto

$$H \circ (u \times \mathrm{id}_{[0,1]}) | [\widehat{\mathbf{u}_0}, \mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_n] = g \circ u = g_{n\#}(u)$$

y otro término

$$-H \circ (u \times \mathrm{id}_{[0,1]}) | [\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_n, \widehat{\mathbf{w}_n}] = -f \circ u = -f_{n\#}(u).$$

En fin, los términos con $i \neq j$ corresponden precisamente a $-h_{n+1} \circ d_n(u)$:

$$\begin{aligned} h_{n+1} \circ d_n(u) = &\sum_{0 \le i < j \le n} (-1)^i \, (-1)^j \, H \circ (u \times \mathrm{id}_{[0,1]}) | [\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i, \dots, \widehat{\mathbf{w}_j}, \dots, \mathbf{w}_n] + \\ &\sum_{0 \le j < i \le n} (-1)^{i+1} \, (-1)^j \, H \circ (u \times \mathrm{id}_{[0,1]}) | [\mathbf{u}_0, \dots, \widehat{\mathbf{u}_j}, \dots, \mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{w}_n]. \end{aligned}$$

Entonces, para todo $u \in \mathrm{Sing}(X)_n$ tenemos

$$d_{n+1} \circ h_n(u) = g_{n\#}(u) - f_{n\#}(u) - h_{n+1} \circ d_n(u).$$

■

Morfismos homotópicos entre complejos inducen los mismos morfismos en homología, y entonces tenemos

1.10. Corolario. *Si $f, g\colon X \to Y$ son dos aplicaciones continuas que son homotópicas, entonces*

$$f_{n*} = g_{n*}\colon H_n(X) \to H_n(Y).$$

Ahora vemos que la noción de complejos homotópicos viene de la correspondiente noción en topología:

1.11. Observación. *Sean X y Y dos espacios del mismo **tipo homotópico** (es decir, existen aplicaciones continuas $f\colon X \to Y$ y $g \to Y \to X$ tales que $f \circ g \simeq \mathrm{id}_X$ y $g \circ f \simeq \mathrm{id}_Y$). Entonces los complejos correspondientes $C_\bullet(X)$ y $C_\bullet(Y)$ son homotópicos en el sentido de que existen morfismos $f_\#\colon C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ y $g_\#\colon C_\bullet(Y) \to C_\bullet(X)$ tales que $f_\# \circ g_\# \simeq \mathrm{id}_{C_\bullet(X)}$ y $g_\# \circ f_\# \simeq \mathrm{id}_{C_\bullet(Y)}$.*

En particular, si X y Y tienen el mismo tipo homotópico, tenemos $H_n(X) \cong H_n(Y)$.

En particular, un espacio X se llama **contraíble** si tiene el mismo tipo homotópico que el punto. En este caso los grupos de homología de X son

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

La **cohomología singular** se obtiene como una dualización de la homología:

1.12. Definición. Para un espacio topológico X sus grupos de **cohomología singular** $H^n(X)$ son los grupos de cohomología del complejo $C^\bullet := \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(C_\bullet(X), \mathbb{Z})$:

$$0 \to \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(C_0(X), \mathbb{Z}) \xrightarrow{d^0 := d_1^*} \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(C_1(X), \mathbb{Z}) \xrightarrow{d^1 := d_2^*} \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(C_2(X), \mathbb{Z}) \xrightarrow{d^2 := d_3^*} \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(C_3(X), \mathbb{Z}) \to \cdots$$

$$H^n(X) := H^n(\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(C_\bullet(X), \mathbb{Z})).$$

En particular, se ve que H^n es un funtor contravariante: una aplicación continua $X \to Y$ induce homomorfismos de grupos abelianos $H^n(Y) \to H^n(X)$.

Notemos que $H^n(X)$ no es necesariamente la misma cosa que $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(H_n(X), \mathbb{Z})$. Vamos a ver la relación entre $H_n(X)$ y $H^n(X)$ en §2.

2. Teoremas de coeficientes universales

Aquí vamos a ver una aplicación de Ext y Tor en topología algebraica: estos funtores naturalmente aparecen en los **teoremas de coeficientes universales**. Ya hemos definido el complejo singular $C_\bullet(X)$ en §1. A veces es útil "cambiar los coeficientes" y considerar el complejo generado libremente por los símplices singulares sobre un grupo abeliano arbitrario A:

2.1. Definición. Si A es un grupo abeliano, entonces la **homología singular de X con coeficientes en A** es la homología del complejo $C_\bullet(X) \otimes_\mathbb{Z} A$ (con diferenciales inducidos por el funtor $- \otimes_\mathbb{Z} A$):

$$H_n(X; A) := H_n(C_\bullet(X) \otimes_\mathbb{Z} A).$$

Y para definir la cohomología con coeficientes en A, el complejo singular se dualiza por el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(-, A)$:

2.2. Definición. La **cohomología singular de X con coeficientes en A** es la cohomología del complejo $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(C_\bullet(X), A)$ (con los diferenciales $d^n := d_{n+1}^\vee : C_n^\vee(X) \to C_{n+1}^\vee(X)$ inducidos por el funtor $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(-, A)$)

$$H^n(X; \mathbb{Z}) := H^n(\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(C_\bullet(X), A)).$$

Un problema natural es analizar la relación entre los grupos $H_n(X)$, $H_n(X; A)$ y $H^n(X; A)$. La construcción del complejo singular es un detalle superfluo; lo que nos interesa es cómo los funtores inexactos $- \otimes_R M$ y $\underline{\mathrm{Hom}}_R(-, M)$ afectan la (co)homología de complejos. La respuesta tiene algo que ver con Tor y Ext.

2.3. Proposición (Fórmula de Künneth). *Sea $P_\bullet$ un complejo de R-módulos planos*

$$\cdots \to P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \cdots$$

tal que para cada n el submódulo $\operatorname{im} d_n \subset P_{n-1}$ *es también plano. Entonces para cada R-módulo M hay una sucesión exacta corta*

$$0 \to H_n(P_\bullet) \otimes_R M \to H_n(P_\bullet \otimes_R M) \to \operatorname{Tor}_1^R(H_{n-1}(P), M) \to 0$$

Recordemos que, por la definición, P es plano si el funtor $- \otimes_R P$ es exacto. Es la misma cosa que $\operatorname{Tor}_i^R(P, -) = \operatorname{Tor}_i^R(-, P) = 0$ para $i > 0$.

Demostración. Después de aplicación del funtor $- \otimes_R M$, la sucesión exacta corta

$$0 \to \ker d_n \to P_n \xrightarrow{d_n} \operatorname{im} d_n \to 0$$

induce una sucesión exacta

$$\cdots \to \operatorname{Tor}_1^R(\ker d_n, M) \to \operatorname{Tor}_1^R(P_n, M) \to \operatorname{Tor}_1^R(\operatorname{im} d_n, M) \to \ker d_n \otimes_R M \to P_n \otimes_R M \xrightarrow{d_n} \operatorname{im} d_n \otimes_R M \to 0$$

Pero $\operatorname{im} d_n$ y P_n son planos por nuestra hipótesis, y entonces $\operatorname{Tor}_i^R(\operatorname{im} d_n, M) = \operatorname{Tor}_i^R(P_n, M) = 0$ para $i > 0$, de donde el módulo $\ker d_n$ es también plano, y nos queda una sucesión exacta corta

$$0 \to \ker d_n \otimes_R M \to P_n \otimes_R M \xrightarrow{d_n \otimes \mathrm{id}} \operatorname{im} d_n \otimes_R M \to 0$$

Estas sucesiones para todo n forman una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \to \ker d_\bullet \otimes_R M \to P_\bullet \otimes_R M \xrightarrow{d_\bullet \otimes \mathrm{id}} \operatorname{im} d_\bullet \otimes_R M \to 0$$

Podemos examinar la correspondiente sucesión exacta larga de homología

$$\cdots \to H_n(\ker d_\bullet \otimes_R M) \to H_n(P_\bullet \otimes_R M) \to H_n(\operatorname{im} d_\bullet \otimes_R M) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(\ker d_\bullet \otimes_R M) \to \cdots$$

Los complejos $\ker d_\bullet$ y $\operatorname{im} d_\bullet$ tienen diferenciales nulos. Entonces $H_n(\ker d_\bullet \otimes_R M) \cong \ker d_n \otimes_R M$ y $H_n(\operatorname{im} d_\bullet \otimes_R M) \cong \operatorname{im} d_n \otimes_R M$. La construcción de los morfismos de conexión revela que en este caso $\delta\colon H_n(\operatorname{im} d_\bullet \otimes_R M) \to H_{n-1}(\ker d_\bullet \otimes_R M)$ es simplemente el morfismo $i \otimes \mathrm{id}$, donde $i\colon \operatorname{im} d_n \rightarrowtail \ker d_{n-1}$ es la inclusión canónica.

(*) $$\cdots \to \ker d_n \otimes_R M \to H_n(P_\bullet \otimes_R M) \to \operatorname{im} d_n \otimes_R M \xrightarrow{i \otimes \mathrm{id}} \ker d_{n-1} \otimes_R M \to \cdots$$

Por la definición de homología, tenemos sucesiones exactas cortas

$$0 \to \operatorname{im} d_n \xrightarrow{i} \ker d_{n-1} \to H_{n-1}(P_\bullet) \to 0$$

La sucesión exacta corta con $\operatorname{Tor}_\bullet^R(-, M)$ demuestra que

$$\begin{aligned} \operatorname{Tor}_1^R(H_{n-1}(P_\bullet), M) &\cong \ker(\operatorname{im} d_n \otimes_R M \xrightarrow{i \otimes \mathrm{id}} \ker d_{n-1} \otimes_R M) \\ &= \operatorname{im}(H_n(P_\bullet \otimes_R M) \to \operatorname{im} d_n \otimes_R M). \end{aligned}$$

Aquí hemos usado la exactitud de (*). Luego,

$$\ker(H_n(P_\bullet \otimes_R M) \to \operatorname{im} d_n \otimes_R M) \cong H_n(P_\bullet) \otimes_R M.$$

Finalmente, tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \to H_n(P_\bullet) \otimes_R M \to H_n(P_\bullet \otimes_R M) \to \operatorname{Tor}_1^R(H_{n-1}(P_\bullet), M) \to 0$$

∎

Hermann Lorenz Künneth (1892–1975) fue un matemático alemán. La fórmula de arriba (bajo una versión más general, esencialmente para producto tensorial de un complejo con otro complejo; véase §) fue el tema de su tesis de doctorado "Über die Bettischen Zahlen einer Produktmannigfaltigkeit" ("Sobre los números de Betti de productos de variedades"), defendida en la Universidad de Erlangen en 1922 bajo la dirección de Heinrich Tietze.

2.4. Proposición. *Sea $P_\bullet$ un complejo de R-módulos proyectivos tal que para todo n el submódulo $\operatorname{im} d_n \subset P_{n-1}$ es también proyectivo. Entonces para cada R-módulo M hay una sucesión exacta corta*

$$0 \to \operatorname{Ext}^1_R(H_{n-1}(P_\bullet), M) \to H^n(\underline{\operatorname{Hom}}_R(P_\bullet, M)) \to \underline{\operatorname{Hom}}_R(H_n(P_\bullet), M) \to 0$$

Bosquejo de la demostración. Si P_n y $\operatorname{im} d_n$ son proyectivos, entonces la sucesión exacta corta

$$0 \to \ker d_n \to P_n \to \operatorname{im} d_n \to 0$$

implica que $\ker d_n$ es también proyectivo y tenemos isomorfismos (¡no canónicos!) $P_n \cong \ker d_n \oplus \operatorname{im} d_n$.

Aplicando $\underline{\operatorname{Hom}}_R(-, M)$, obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \to \underline{\operatorname{Hom}}_R(\operatorname{im} d_n, M) \to \underline{\operatorname{Hom}}_R(P_n, M) \to \underline{\operatorname{Hom}}_R(\ker d_n, M) \to 0$$

y luego una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \to \underline{\operatorname{Hom}}_R(\operatorname{im} d_\bullet, M) \to \underline{\operatorname{Hom}}_R(P_\bullet, M) \to \underline{\operatorname{Hom}}_R(\ker d_\bullet, M) \to 0$$

Tenemos el mismo argumento que en 2.3, solo remplazamos $\otimes$ por $\underline{\operatorname{Hom}}$ y Tor por Ext. ■

Podemos aplicar 2.3 y 2.4 a nuestra situación con complejos singulares $C_\bullet(X)$. El único detalle importante es que $C_\bullet(X)$ es un complejo de grupos abelianos libres.

2.5. Corolario. *Si $C_\bullet$ es un complejo de grupos abelianos libres, entonces para cada grupo abeliano A tenemos sucesiones exactas cortas*

$$0 \longrightarrow H_n(C_\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow H_n(C_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} A) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(C_\bullet), A) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(C_\bullet), A) \longrightarrow H^n(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_\bullet, A)) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(C_\bullet), A) \longrightarrow 0$$

que se escinden, no canónicamente:

$$\begin{gathered} H_n(C_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} A) \cong H_n(C_\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}} A \oplus \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(C_\bullet), A), \\ H^n(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_\bullet, A)) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(C_\bullet), A) \oplus \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(C_\bullet), A). \end{gathered}$$

Demostración. Si todos C_n son grupos abelianos libres, entonces los $\operatorname{im} d_n \subset C_{n-1}$ son automáticamente grupos abelianos libres. En particular, son proyectivos, y por tanto planos, así que tenemos las sucesiones exactas cortas de 2.3 y 2.4. Gracias a la proyectividad de los $\operatorname{im} d_n$, tenemos isomorfismos (¡no canónicos!)

$$C_n \cong \ker d_n \oplus \operatorname{im} d_n$$

y entonces descomposiciones

$$\begin{gathered} C_n \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong (\ker d_n \otimes_{\mathbb{Z}} A) \oplus (\operatorname{im} d_n \otimes_{\mathbb{Z}} A), \\ \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n, A) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\ker d_n, A) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\operatorname{im} d_n, A). \end{gathered}$$

Esto nos dice que los grupos $H_n(C_\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}} A$ aparecen como sumandos directos de $H_n(C_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} A)$, y los grupos $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(C_\bullet), A)$ como sumandos directos de $H^n(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_\bullet), A)$. Las sucesiones exactas cortas correspondientes nos dicen que el resto es $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(C_\bullet), A)$ (resp. $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(C_\bullet), A)$). ■

3. Un par de aplicaciones

3.1. Ejemplo. En topología algebraica se estudia que la homología $H_n(\mathbb{RP}^n)$ del espacio proyectivo real $\mathbb{RP}^n$ es la homología del complejo de grupos abelianos libres

$$C_\bullet : \quad \cdots \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$

que consiste en grupos $\mathbb{Z}$ en grados $0, \ldots, n$ y como diferenciales 0 o $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}$, dependiendo de la paridad (este complejo proviene de una descomposición celular de $\mathbb{RP}^n$ y los números 0 y 2 corresponden al pegamiento de las células).

Entonces los grupos de homología de $\mathbb{RP}^n$ son

i:	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$H_i(\mathbb{RP}^n)$:	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\cdots$

Si n es impar, en grado n vamos a tener $H_i(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}$ (porque los espacios proyectivos de dimensión impar son orientables). Si n es par, en grado n vamos a tener 0 (porque los espacios proyectivos reales de dimensión impar no son orientables*).

Para calcular homología con coeficientes en un grupo abeliano A, nos sirve la formula

$$H_i(X, A) \cong H_i(A) \otimes_{\mathbb{Z}} A \oplus \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X), A).$$

En grados impares vamos a tener $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong A/2A$, y en grados pares va a salir $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, A) \cong {}_2A$, la 2-torsión en A:

i:	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$H_i(\mathbb{RP}^n)$:	A	$A/2A$	${}_2A$	$A/2A$	${}_2A$	$A/2A$	$\cdots$

Si la dimensión n es impar, en grado $i = n$ vamos a tener A y si n es par, vamos a tener ${}_2A$. ▲

3.2. Ejercicio. *Calcule los grupos de cohomología $H^i(\mathbb{RP}^n; A)$ con coeficientes en A.*

3.3. Ejemplo (Kan, Whitehead, 1961). Usando el teorema de coeficientes universales y las propiedades básicas de $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}$, se puede ver que no existe un espacio topológico X tal que

$$H^{n-1}(X, \mathbb{Z}) = 0 \quad \text{y} \quad H^n(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}.$$

Nos sirven un par de observaciones sobre grupos abelianos divisibles y libres de torsión.

Lema 1. *Si A es libre de torsión y $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) = 0$, entonces $A = 0$.*

De hecho, podemos elegir un epimorfismo $F \twoheadrightarrow A$ de un grupo abeliano libre F a nuestro grupo de torsión A. Sea $\{e_i\}_{i \in I}$ una base de F. Tenemos una resolución libre

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & e_i & \longmapsto & n_i e_i & \longmapsto & \text{un elemento de orden } n_i & & \end{array}$$

Noten que dado que A es de torsión, tenemos $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) = 0$. Junto con la suposición $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) = 0$, eso nos da un isomorfismo

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(F, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(F, \mathbb{Z})$$

*Los espacios proyectivos complejos $\mathbb{CP}^n$ son siempre orientables (como variedades complejas), y su homología es dada por

$$H_i(\mathbb{CP}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & 0 \le i \le 2n \text{ es par}, \\ 0, & encasocontrario. \end{cases}$$

Supongamos que esta aplicación manda $f\colon F \to \mathbb{Z}$ a $f'\colon F \to \mathbb{Z}$. Entonces $f'(e_i) = n_i f(e_i)$. Sin embargo, es un isomorfismo y por eso $n_i = \pm 1$, lo cual significa que todos los elementos son de orden 1, es decir $A = 0$, QED.

Lema 2. *Si A es un grupo abeliano tal que $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) = 0$ y $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z})$ es un grupo divisible y libre de torsión, entonces A es también divisible y libre de torsión.*

Para el morfismo de multiplicación por n sobre A, sea ${}_nA$ su núcleo y A_n su conúcleo. Tenemos sucesiones exactas cortas:

$$0 \to nA \to A \to A_n \to 0 \quad \text{y} \quad 0 \to {}_nA \to A \xrightarrow{n} nA \to 0$$

Apliquemos el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$ para obtener sucesiones exactas con los Ext correspondientes:

$$0 \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_n, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(nA, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A_n, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(nA, \mathbb{Z}) \to 0$$

y

$$0 \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(nA, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_nA, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(nA, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}({}_nA, \mathbb{Z}) \to 0$$

Según nuestra hipótesis, $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(nA, \mathbb{Z}) = 0$, y también $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_nA, \mathbb{Z}) = 0$ porque ${}_nA$ es de torsión. Nos quedan sucesiones exactas cortas

$$0 \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A_n, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(nA, \mathbb{Z}) \to 0$$

y

$$0 \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(nA, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}({}_nA, \mathbb{Z}) \to 0$$

Compongámoslas para obtener una sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A_n, \mathbb{Z}) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}({}_nA, \mathbb{Z}) \arrow[r] & 0 \\
& & & \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(nA, \mathbb{Z}) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Aquí la aplicación $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z})$ es exactamente la multiplicación por n, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
{}_n\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) &= \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A_n, \mathbb{Z}), \\
\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z})_n &= \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}({}_nA, \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Y si $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z})$ es divisible y libre de torsión, entonces $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A_n, \mathbb{Z}) = \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}({}_nA, \mathbb{Z}) = 0$, que por el lema 1 de arriba implica $A_n = {}_nA = 0$ (porque A_n y ${}_nA$ son grupos de torsión), QED.

Ahora volvamos a nuestro ejemplo. Si tuviéramos un espacio X con $H^{n-1}(X, \mathbb{Z}) = 0$ y $H^n(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}$, entonces el teorema de coeficientes universales implicaría

$$\begin{aligned}
0 = H^{n-1}(X) &\cong \operatorname{Hom}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(H_{n-2}(X), \mathbb{Z}), \\
\mathbb{Q} = H^n(X) &\cong \operatorname{Hom}(H_n(X), \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

En particular, de la primera fórmula concluimos que $\operatorname{Hom}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) = 0$. Con respecto a la segunda fórmula, noten que $\mathbb{Q}$ no puede ser descompuesto como una suma directa no trivial de dos grupos abelianos $\mathbb{Q} = A \oplus B$ donde $A, B \neq 0$. Pero en nuestro caso no podemos tener $\operatorname{Hom}(H_n(X), \mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$, porque $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z})$ nunca es un grupo divisible para cualquier grupo abeliano $A \neq 0$ (¡ejercicio!). Entonces tenemos

$$\operatorname{Hom}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) = \mathbb{Q}.$$

Luego $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z})$ es divisible y libre de torsión, y por el lema de arriba concluimos que $H_{n-1}(X)$ es también divisible y libre de torsión. Es un grupo no trivial, y por eso $H_{n-1}(X)$ contiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Q}$ y hay una sobreyección

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \operatorname{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$$

Pero $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ no es numerable, como hemos visto en una de las lecciones, mientras que $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ sí lo es. Hemos obtenido una contradicción.

Este curioso ejemplo viene del artículo "On the realizability of singular cohomology groups" (1961) de Daniel Kan y George Whitehead. ▲

3.4. Ejercicio. *Demuestre que* $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z})$ *nunca es un grupo divisible para cualquier grupo abeliano* $A \neq 0$.