Sumas de potencias de números naturales y los números de Bernoulli

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

24 de Febrero de 2017

La suma de n números naturales consecutivos puede ser calculada mediante la fórmula

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n+1)\,n}{2} = \frac{1}{2}\,n^2 + \frac{1}{2}\,n.$$

Probablemente el lector también conoce la fórmula para las sumas de cuadrados:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}\,n^3 + \frac{1}{2}\,n^2 + \frac{1}{6}\,n.$$

—es fácil demostrarla por inducción. Muchos matemáticos trataron de encontrar la fórmula similar para las sumas de cubos y otras potencias superiores. Es un problema muy natural, y la solución fue descubierta al principio del siglo XVIII por el matemático suizo Jacob Bernoulli (1654–1705) y independientemente por el matemático japonés Seki Takakazu (1642–1708). Denotemos por $S_k(n)$ la suma de las k-ésimas potencias de los números naturales hasta n:

$$S_k(n) := \sum_{1 \le i \le n} i^k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k.$$

En particular,

$$S_0(n) = n, \quad S_1(n) = \frac{1}{2}\,n^2 + \frac{1}{2}\,n, \quad S_2(n) = \frac{1}{3}\,n^3 + \frac{1}{2}\,n^2 + \frac{1}{6}\,n.$$

Para obtener las fórmulas para $S_3(n), S_4(n), S_5(n)$, etcétera, recordemos primero el **teorema del binomio**:

$$(x+y)^k = \sum_{0 \le i \le k} \binom{k}{i} x^{k-i}\,y^i,$$

donde

$$\binom{k}{i} = \frac{k!}{(k-i)!\,i!}$$

denota un **coeficiente binomial**, definido como el número de posibilidades de escoger i objetos entre un total de k objetos.

En PARI/GP, `binomial(k,i)` $= \binom{k}{i}$.

```
/* vector (n,i,expr) devuelve un vector con la expresión
   expr evaluada con i=1, i=2, ..., i=n: */
? vector (7,i,binomial (6,i-1))
% = [1, 6, 15, 20, 15, 6, 1]
```

En particular, tenemos

$$(m+1)^{k+1} - m^{k+1} = \sum_{0 \le i \le k} \binom{k+1}{i} m^i.$$

La suma de estas identidades para $m = 1, 2, \ldots, n$ nos da

$$(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{0 \le i \le k} \binom{k+1}{i} S_i(n),$$

de donde tenemos una expresión de $S_k(n)$ en términos de $S_0(n), S_1(n), \ldots, S_{k-1}(n)$:

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \left((n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{0 \le i \le k-1} \binom{k+1}{i} S_i(n) \right). \tag{1}$$

Por inducción se ve que $S_k(n)$ es un polinomio en n de grado $k+1$, con coeficiente principal $\frac{1}{k+1}$. Para evitar una posible confusión, denotemos la variable por x. El polinomio $S_k(x) \in \mathbb{Q}[x]$ está determinado por sus valores en $x = n \in \mathbb{N}$. Por la definición de $S_k(n)$, tenemos $S_k(n+1) - S_k(n) = (n+1)^k$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Para los polinomios, esto nos da la relación

$$S_k(x+1) - S_k(x) = (x+1)^k. \tag{2}$$

En particular, $S_k(1) - S_k(0) = 1$, y ya que $S_k(1) = 1$, esto significa que $S_k(0) = 0$; es decir, el término constante del polinomio $S_k(x)$ es nulo (también podemos verlo por inducción de la fórmula (1)). Usando (1), podemos calcular algunos $S_k(x)$.

Implementemos nuestra fórmula para S_k en PARI/GP:

```
S(k) = if (k == 0, x, 1/(k+1)*((x+1)^(k+1) - 1 - sum (i=0, k-1, binomial(k+1,i) * S(i))));

? S(3)
% = 1/4*x^4 + 1/2*x^3 + 1/4*x^2
```

El lector que conoce un poco de programación puede notar que el código de arriba es muy ineficaz; por ejemplo, para calcular `S(20)` ya se necesita mucho tiempo. He aquí otra versión mucho más rápida:

```
/* La tabla de S (k): */
s_table = [];

S (k) = {
  if (k == 0, return (x));

  /* Extender la tabla de valores, de ser necesario: */
  if (length(s_table) < k, s_table = concat(s_table, vector(k-length(s_table))));

  /* Devolver el valor, si está en la tabla;
     sino, calcularlo y poner en la tabla: */
  if (s_table[k], s_table[k],
      s_table[k] = 1/(k+1)*((x+1)^(k+1) - 1 - sum (i=0, k-1, binomial(k+1,i) * S(i))))
}
```

(Trate de calcular, por ejemplo, `S(20)` usando ambas versiones.)

$$
\begin{aligned}
S_0(x) &= x,\\
S_1(x) &= \frac{1}{2}\,x^2 + \boxed{\frac{1}{2}}\,x,\\
S_2(x) &= \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2 + \boxed{\frac{1}{6}}\,x,\\
S_3(x) &= \frac{1}{4}\,x^4 + \frac{1}{2}\,x^3 + \frac{1}{4}\,x^2,\\
S_4(x) &= \frac{1}{5}\,x^5 + \frac{1}{2}\,x^4 + \frac{1}{3}\,x^3 \boxed{-\frac{1}{30}}\,x,\\
S_5(x) &= \frac{1}{6}\,x^6 + \frac{1}{2}\,x^5 + \frac{5}{12}\,x^4 - \frac{1}{12}\,x^2,\\
S_6(x) &= \frac{1}{7}\,x^7 + \frac{1}{2}\,x^6 + \frac{1}{2}\,x^5 - \frac{1}{6}\,x^3 + \boxed{\frac{1}{42}}\,x,\\
S_7(x) &= \frac{1}{8}\,x^8 + \frac{1}{2}\,x^7 + \frac{7}{12}\,x^6 - \frac{7}{24}\,x^4 + \frac{1}{12}\,x^2,\\
S_8(x) &= \frac{1}{9}\,x^9 + \frac{1}{2}\,x^8 + \frac{2}{3}\,x^7 - \frac{7}{15}\,x^5 + \frac{2}{9}\,x^3 \boxed{-\frac{1}{30}}\,x,\\
S_9(x) &= \frac{1}{10}\,x^{10} + \frac{1}{2}\,x^9 + \frac{3}{4}\,x^8 - \frac{7}{10}\,x^6 + \frac{1}{2}\,x^4 - \frac{3}{20}\,x^2,\\
S_{10}(x) &= \frac{1}{11}\,x^{11} + \frac{1}{2}\,x^{10} + \frac{5}{6}\,x^9 - x^7 + x^5 - \frac{1}{2}\,x^3 + \boxed{\frac{5}{66}}\,x.
\end{aligned}
$$

Las expresiones de arriba, también hasta $S_{10}(n)$, aparecen en la página 97 del libro de Bernoulli "Ars conjectandi", publicado póstumamente en 1713. Luego Bernoulli escribe que, usando sus fórmulas, calculó en un "semi-cuarto de hora" la suma

$$1^{10} + 2^{10} + \cdots + 1000^{10} = S_{10}(1000) = 91\,409\,924\,241\,424\,243\,424\,241\,924\,242\,500.$$

Con ayuda de una computadora, se puede verificar que ¡el resultado es correcto!

```
? { local(x); x = 1000; eval (S(10)) }
% = 91409924241424243424241924242500

? sum (i=1,1000,i^10)
% = 91409924241424243424241924242500
```

Definición. *El k-**ésimo número de Bernoulli** B_k es el coeficiente de x en el polinomio $S_k(x)$. En otras palabras,*

$$B_k := S_k'(0).$$

Euler leyó "Ars Conjectandi" y estudió los números B_k, llamándolos los "números de Bernoulli", en el capítulo II.5 de su libro "Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum". Varias identidades para B_k que aparecen en nuestro curso fueron descubiertas por Euler. Por ejemplo, la derivada de (1) nos da

$$S_k'(x) = \frac{1}{k+1}\left((k+1)\,(x+1)^k - \sum_{0\le i\le k-1} \binom{k+1}{i}\, S_i'(x)\right),$$

y para $x = 0$ tenemos

$$B_k = S_k'(0) = 1 - \frac{1}{k+1} \sum_{0 \le i \le k-1} \binom{k+1}{i} B_i.$$

Proposición. *Para todo $k \ge 0$ se tiene*

$$\sum_{0 \le i \le k} \binom{k+1}{i} B_i = k+1.$$

Esto nos da una definición recursiva de los B_k:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, \\ B_0 + 2\,B_1 &= 2, \\ B_0 + 3\,B_1 + 3\,B_2 &= 3, \\ B_0 + 4\,B_1 + 6\,B_2 + 4\,B_3 &= 4, \\ &\vdots \end{aligned}$$

A partir de estas identidades se pueden calcular sucesivamente $B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots$

```
/* La tabla de B (k): */
b_table = [];

B (k) = {
  if (k == 0, return (1));

  if (length(b_table) < k, b_table = concat(b_table, vector(k-length(b_table))));
  if (b_table[k], b_table[k],
      b_table[k] = 1 - 1/(k+1)*sum (i=0, k-1, binomial(k+1,i)*B (i)))
}

? polcoeff (S(10),1,n)
% = 5/66
? B(10)
% = 5/66
```

Luego los primeros números de Bernoulli son

k:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
B_k:	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	$\cdots$

(Bernoulli y Euler no usaban la notación B_k, sino que escribían $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{30}$, $C = \frac{1}{42}$, $D = -\frac{1}{30}$, etcétera.)

La derivada de (2) es

$$S_k'(x+1) - S_k'(x) = k\,(x+1)^{k-1},$$

y la suma de estas identidades para $x = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ nos da

$$S_k'(n) - S_k'(0) = k\,S_{k-1}(n).$$

Entonces, los polinomios $S_k(x)$ satisfacen la identidad

$$S_k'(x) = k\, S_{k-1}(x) + B_k.$$

Esto, junto con $S_1(x) = x$, define completamente a todos los $S_k(x)$ (el término constante es nulo).

Ejercicio. *Demuestre la identidad*

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \sum_{0 \le i \le k} \binom{k+1}{i} B_i\, n^{k+1-i}.$$

Indicación: si $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ es un polinomio de grado d, entonces

$$p(x) = \sum_{0 \le i \le d} \frac{p^{(i)}(0)}{i!}\, x^i,$$

donde $p^{(i)}(x)$ es la i-ésima derivada iterada de $p(x)$:

$$p^{(0)}(x) := p(x),\ p^{(1)}(x) := p'(x),\ p^{(2)}(x) := p''(x),\ p^{(3)}(x) := p'''(x),\ \ldots$$

Revisemos nuestra tabla de los primeros números de Bernoulli. Se observan dos patrones:

- $B_k = 0$ para $k \ge 3$ impar. Esto va a ser evidente más adelante a partir de otra representación de B_k mediante una función generatriz par.
- $B_k \ne 0$ para k par, y los signos se alternan. Es posible demostrar esto directamente de modo combinatorio o a partir de la fórmula con la **función zeta de Riemann**

$$(-1)^{k+1} B_{2k}\, \frac{2^{2k-1}}{(2k)!}\, \pi^{2k} = \zeta(2k) := \sum_{n \ge 1} \frac{1}{n^{2k}} > 0.$$

En cuanto a los valores de B_k, no se nota ningún patrón evidente. Por ejemplo, en $B_{12} = -\frac{691}{2730}$ el numerador 691 es un número primo que aparentemente no tiene nada que ver con 12. Sin embargo, si factorizamos los *denominadores* de B_k, se revelan números primos relacionados con k de alguna manera:

k:	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	$\cdots$
B_k:	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\cdot 3}$	$-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}$	$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 7}$	$-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}$	$\frac{5}{2\cdot 3\cdot 11}$	$-\frac{691}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13}$	$\frac{7}{2\cdot 3}$	$-\frac{3617}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 17}$	$\frac{43867}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 19}$	$-\frac{174611}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 11}$	$\cdots$

El lector puede formular su propia conjetura sobre los denominadores; más adelante vamos a ver la respuesta en el **teorema de Clausen–von Staudt**.

Por supuesto, PARI/GP ya sabe calcular los números de Bernoulli. La función `bernfrac(k)` devuelve B_k:

```
? bernfrac(1)
% = -1/2
? bernfrac(10)
% = 5/66
```

Atención: PARI/GP (y también muchos libros de texto) usa otra definición de B_k según la cual $B_1 = -\frac{1}{2}$ (note el signo "$-$"). Para $k > 1$, los B_k de PARI/GP son los mismos que los nuestros. La función `bernreal(k)` calcula el valor aproximado de B_k:

```
? bernreal(4)
% = -0.033333333333333333333333333333333333333
```