Series formales de potencias

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

27 de Febrero de 2017

Toda sucesión de números a_k puede ser vista como los coeficientes de una serie de potencias $\sum_k a_k\, t^k$. A veces esta serie surge como la **serie de Taylor** de una función real o compleja f:

$$\sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}\,(t-t_0)^k$$

(cuando las derivadas de f en t_0 existen). Las funciones que pueden ser representadas de tal manera se llaman **analíticas**. He aquí algunos ejemplos de series de Taylor:

$$\textbf{la serie geométrica}\ \frac{1}{1-t} = \sum_{k\geq 0} t^k \quad \text{para } |t| < 1,$$

$$e^t = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!}, \qquad \ln(1+t) = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1}\,\frac{t^k}{k} \quad \text{para } |t| < 1,$$

$$\operatorname{sen} t = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,t^{2k+1}, \qquad \cos t = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\,t^{2k}.$$

En general, la serie $\sum_k a_k\, t^k$ que corresponde a una sucesión arbitraria (a_k) no tiene por qué ser convergente, aunque sería útil manipular con expresiones como "$\sum_k a_k\, t^k$" de manera puramente formal, como en efecto hacían los matemáticos de la época de Euler, cuando todavía no había una base rigurosa de análisis.

Definición. *Una **serie formal de potencias** en variable t con coeficientes racionales es una expresión*

$$f(t) = \sum_{k\geq 0} a_k\, t^k = a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2 + a_3\, t^3 + \cdots$$

donde $a_k \in \mathbb{Q}$.

Vamos a denotar el conjunto de tales series formales por $\mathbb{Q}[\![t]\!]$. Las series formales se pueden manipular de la misma manera que los polinomios. A saber, la suma de dos series se calcula término por término:

$$\left(\sum_k a_k\, t^k\right) + \left(\sum_k b_k\, t^k\right) := \sum_k (a_k + b_k)\, t^k. \tag{1}$$

El producto de dos series se calcula mediante la distributividad formal:

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3 + \cdots)\cdot(b_0 + b_1\,t + b_2\,t^2 + b_3\,t^3 + \cdots) = {} & a_0\,b_0 + \\ & (a_0\,b_1 + a_1\,b_0)\,t + \\ & (a_0\,b_2 + a_1\,b_1 + a_2\,b_0)\,t^2 + \\ & (a_0\,b_3 + a_1\,b_2 + a_2\,b_1 + a_3\,b_0)\,t^3 + \cdots\end{aligned}$$

Es decir,

$$\left(\sum_k a_k\,t^k\right)\cdot\left(\sum_k b_k\,t^k\right) := \sum_k\left(\sum_{i+j=k} a_i\,b_j\right)\,t^k. \tag{2}$$

Note que la adición y multiplicación de polinomios están definidos mediante las mismas fórmulas (1) y (2), y todo polinomio $a_n\,t^n + a_{n-1}\,t^{n-1} + \cdots a_1\,t + a_0$ puede ser visto como una serie formal de potencias

$$a_0 + a_1\,t + \cdots + a_{n-1}\,t^{n-1} + a_n\,t^n + 0\,t^{n+1} + 0\,t^{n+2} + \cdots$$

En otras palabras, un polinomio es una serie formal donde casi todos los coeficientes son nulos.

La adición y multiplicación de series satisfacen las propiedades habituales:

1) La suma es asociativa: $f(t) + (g(t) + h(t)) = (f(t) + g(t)) + h(t)$ para todo $f(t), g(t), h(t) \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$.

2) La suma es conmutativa: $f(t) + g(t) = g(t) + f(t)$ para todo $f(t), g(t) \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$.

3) La **serie nula**
$$0 := 0 + 0\,t + 0\,t^2 + 0\,t^3 + \cdots$$
es el cero respecto a la adición: $f(t) + 0 = f(t)$ para todo $f(t) \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$.

4) Para toda serie $f(t) \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ tenemos la serie opuesta $-f(t) \in R$ tal que $f(t) + (-f(t)) = 0$.
(Si $f(t) = \sum_{k\ge 0} a_k\,t^k$, entonces $-f(t) = \sum_{k\ge 0}(-a_k)\,t^k$.)
Para $f(t) + (-g(t))$ normalmente se escribe $f(t) - g(t)$.

5) El producto es asociativo: $f(t)\cdot(g(t)\cdot h(t)) = (f(t)\cdot g(t))\cdot h(t)$ para todo $f(t), g(t), h(t) \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$.

6) El producto es conmutativo: $f(t)\cdot g(t) = g(t)\cdot f(t)$ para todo $f(t), g(t) \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$.

7) La **serie identidad**
$$1 := 1 + 0\,t + 0\,t^2 + 0\,t^3 + \cdots$$
es la identidad respecto a la multiplicación: $f(t)\cdot 1 = f(t)$ para todo $f(t) \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$.

8) La multiplicación es distributiva respecto a la adición:
$$f(t)\cdot(g(t) + h(t)) = f(t)\cdot g(t) + f(t)\cdot h(t)$$
para todo $f(t), g(t), h(t) \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$. Ya que el producto es conmutativo, también tenemos
$$(f(t) + g(t))\cdot h(t) = f(t)\cdot h(t) + g(t)\cdot h(t).$$

Un ejemplo muy importante de las series formales de potencias que nos va a servir mucho es el siguiente.

Definición. *La **función exponencial formal** es la serie en $\mathbb{Q}[\![t]\!]$ definida como*

$$e^t := \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!}.$$

Observación. *Si $f(t) \neq 0$ y $g(t) \neq 0$, entonces $f(t) \cdot g(t) \neq 0$.*

Demostración. Sean $f(t) = \sum_{k \geq 0} a_k\, t^k$ y $g(t) = \sum_{k \geq 0} b_k\, t^k$ dos series de potencias no nulas. Sea a_i el primer coeficiente no nulo de $f(t)$ y sea b_j el primer coeficiente no nulo en $g(t)$. El coeficiente de t^{i+j} en $f(t) \cdot g(t)$ es

$$a_0\, b_{i+j} + a_1\, b_{i+j-1} + \cdots + a_i\, b_j + a_{i+1}\, b_{j-1} + \cdots + a_{i+j}\, b_0,$$

donde por nuestra elección de a_i y b_j todos los términos son nulos excepto $a_i\, b_j$, que no es nulo porque $a_i \neq 0$, $b_j \neq 0$. ■

Definición. *Se dice que una serie de potencias $f(t) \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ es **invertible** si existe otra serie $g(t) \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ que es inversa a $f(t)$ respecto a la multiplicación; es decir, $f(t) \cdot g(t) = 1$. En este caso escribimos $g(t) = \frac{1}{f(t)}$. El producto $h(t) \cdot \frac{1}{f(t)}$ de una serie $h(t)$ con la serie inversa para $f(t)$ se escribe como una fracción $\frac{h(t)}{f(t)}$.*

Notemos que si $g(t)$ existe, es necesariamente única. En efecto, si hay dos series $g_1(t)$ y $g_2(t)$ tales que $f(t) \cdot g_1(t) = f(t) \cdot g_2(t) = 1$, entonces

$$g_2(t) = \underbrace{f(t) \cdot g_1(t)}_{=1} \cdot g_2(t) = \underbrace{f(t) \cdot g_2(t)}_{=1} \cdot g_1(t) = g_1(t).$$

Observación. *Una serie $f(t) = \sum_{k \geq 0} a_k\, t^k \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ es invertible si y solamente si $a_0 =$ "$f(0)$" no es nulo.*

Note que, en general, sumas infinitas de números racionales no están definidas, así que no se puede evaluar $f(t)$ en un número racional; es posible solo en análisis, donde hay nociones de convergencia. Sin embargo, $f(0)$ sí tiene sentido, y es el término constante de $f(t)$.

Demostración. Estamos buscando otra serie $g(t) = \sum_{k \geq 0} b_k\, t^k \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ tal que $f(t) \cdot g(t) = 1$, es decir,

$$\begin{aligned} a_0\, b_0 &= 1, \\ a_0\, b_1 + a_1\, b_0 &= 0, \\ a_0\, b_2 + a_1\, b_1 + a_2\, b_0 &= 0, \\ &\vdots \\ \sum_{0 \leq i \leq k} a_i\, b_{k-i} &= 0 \quad (k \geq 1) \end{aligned}$$

De la primera ecuación se ve que a_0 tiene que ser no nulo. En este caso, podemos calcular b_k sucesivamente:

$$\begin{aligned}
b_0 &= a_0^{-1}, \\
b_1 &= -a_0^{-1}\,(a_1\,b_0), \\
b_2 &= -a_0^{-1}\,(a_1\,b_1 + a_2\,b_0), \\
&\;\;\vdots \\
b_k &= -a_0^{-1} \sum_{1\le i\le k} a_i\,b_{k-i}.
\end{aligned}$$

■

Ejemplo. *Tenemos*

$$\begin{aligned}
(1-t)\cdot(1+t+t^2+t^3+t^4+\cdots) &= (1+t+t^2+t^3+t^4+\cdots) - (t+t^2+t^3+t^4+t^5+\cdots) = 1, \\
(1+t)\cdot(1-t+t^2-t^3+t^4-\cdots) &= (1-t+t^2-t^3+t^4-\cdots) + (t-t^2+t^3-t^4+t^5-\cdots) = 1.
\end{aligned}$$

Es un análogo de la serie geométrica $\frac{1}{1-t} = \sum_{k\ge 0} t^k$, que en análisis tiene sentido para $|t| < 1$. En nuestro caso, t es una variable formal. ▲

Como hemos visto, si tenemos una serie

$$f(t) = a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3 + \cdots$$

tal que $a_0 = 0$, entonces $f(t)$ no es invertible en $\mathbb{Q}[\![t]\!]$. Para resolver este problema, podemos introducir potencias negativas de t y escribir

$$f(t) = t^{-n}\,(a_n + a_{n+1}\,t + a_{n+2}\,t^2 + a_{n+3}\,t^3 + \cdots),$$

donde a_n es el primer coeficiente no nulo en $f(t)$. Aquí la serie entre paréntesis es invertible en $\mathbb{Q}[\![t]\!]$. Para que tenga sentido el término "t^{-n}", podemos introducir la siguiente generalización.

Definición. *Una **serie formal de Laurent**[*] es una serie formal con un número finito de potencias negativas:*

$$f(t) = \sum_{k\ge -N} a_k\,t^k \quad \textit{para algún } N \in \mathbb{N}.$$

Para las series de Laurent también tienen sentido adición y multiplicación, definidas mediante las mismas fórmulas (1) y (2), y toda serie puede ser vista como una serie de Laurent con coeficientes negativos nulos. El conjunto de las series de Laurent se denota por $\mathbb{Q}(\!(t)\!)$.

Tenemos las siguientes generalizaciones de los resultados de arriba:

1) Si $f(t) \ne 0$ y $g(t) \ne 0$ son dos series de Laurent no nulas, entonces $f(t)\cdot g(t) \ne 0$ (la demostración es la misma).

2) Todas las series de Laurent no nulas son invertibles. En particular, toda serie no nula $f(t) \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ es invertible en $\mathbb{Q}(\!(t)\!)$.

[*] Pierre Alphonse Laurent (1813–1854), un matemático y oficial militar francés.

Ejemplo. *La serie $t + t^2 + t^3 + \cdots$ es invertible como serie de Laurent:*

$$(t^{-1} - 1)\,(t + t^2 + t^3 + \cdots) = (1 + t + t^2 + \cdots) - (t + t^2 + t^3 + \cdots) = 1.$$

▲

PARI/GP puede trabajar con series de potencias. Para indicar que los términos de grado $\geq n$ están omitidos, se escribe "`+ O(t^n)`":

```
? 1/(1-t + O(t^10))
% = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + t^8 + t^9 + O(t^10)

? (t + 2*t^2 + 3*t^3 + 4*t^4 + 5*t^5 + O (t^6))^2
% = t^2 + 4*t^3 + 10*t^4 + 20*t^5 + 35*t^6 + O(t^7)
```

Series de Laurent:

```
? 1/(t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + O (t^7))
% = t^-1 - 1 + O(t^5)
```

PARI/GP conoce la exponencial formal:

```
? exp (t)
% = 1 + t + 1/2*t^2 + 1/6*t^3 + 1/24*t^4 + 1/120*t^5 + 1/720*t^6 +
     1/5040*t^7 + 1/40320*t^8 + 1/362880*t^9 + 1/3628800*t^10 +
     1/39916800*t^11 + 1/479001600*t^12 + 1/6227020800*t^13 +
     1/87178291200*t^14 + 1/1307674368000*t^15 + 1/20922789888000*t^16 +
     O(t^17)
```

El número de términos se puede cambiar con el parámetro `seriesprecision`:

```
? default (seriesprecision, 6)
? exp (t)
% = 1 + t + 1/2*t^2 + 1/6*t^3 + 1/24*t^4 + 1/120*t^5 + 1/720*t^6 + O(t^7)
```

Definición. *Dadas dos series de potencias $f(t) = \sum_{k\geq 0} a_k\, t^k$ y $g(t) = \sum_{k\geq 0} b_k\, t^k$, si $g(0) = b_0 = 0$, entonces la* ***composición*** *$(f \circ g)(t)$ (**sustitución de** g **en** f) es la serie*

$$(f \circ g)(t) := f(g(t)) := \sum_{k\geq 0} a_k\, g(t)^k.$$

Ya que $b_0 = 0$, toda potencia $g(t)^k$ no tiene términos de grado $< k$, así que la suma infinita tiene sentido.

Ejemplo. *Si $f(t)$ es una serie formal tal que $f(0) = 0$, entonces*

$$\frac{1}{1 - f(t)} = 1 + f(t) + f(t)^2 + f(t)^3 + f(t)^4 + \cdots,$$
$$\frac{1}{1 + f(t)} = 1 - f(t) + f(t)^2 - f(t)^3 + f(t)^4 - \cdots$$

—es una generalización de la serie geométrica. ▲

Ejemplo. *Podemos "evaluar" e^t en $-t$. El resultado de la sustitución es la serie formal*

$$e^{-t} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \, \frac{t^k}{k!}.$$

En general, podemos componer e^t con toda $f(t)$ tal que $f(0) = 0$. Tenemos la identidad habitual

$$e^{f(t)+g(t)} = e^{f(t)} \cdot e^{g(t)}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} e^{f(t)} \cdot e^{g(t)} &= \left(\sum_{i\geq 0} \frac{f(t)^i}{i!}\right) \cdot \left(\sum_{j\geq 0} \frac{g(t)^j}{j!}\right) \\ &= \sum_{k\geq 0} \sum_{i+j=k} \frac{k!}{k!} \frac{f(t)^i}{i!} \frac{g(t)^j}{j!} \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{i\geq 0} \binom{k}{i} f(t)^i \, g(t)^{k-i} \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{(f(t)+g(t))^k}{k!} = e^{f(t)+g(t)}. \end{aligned}$$

▲

Derivadas formales

Definición. *La **derivada formal** de una serie formal de potencias $f(t) = \sum_{k\geq 0} a_k \, t^k \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ está definida por*

$$f'(t) := \sum_{k\geq 1} k \, a_k \, t^{k-1}.$$

Ejemplo.

$$(e^t)' = \left(\sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!}\right)' = \sum_{k\geq 1} k \, \frac{t^{k-1}}{k!} = \sum_{k\geq 1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = e^t.$$

▲

Observación (Serie de Taylor formal)**.** *Para las derivadas iteradas de $f(t) = \sum_{k\geq 0} a_k \, t^k \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ se tiene $f^{(k)}(0) = k! \, a_k$, lo que nos da*

$$f(t) = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \, t^k.$$

Demostración. Se ve inmediatamente de las definiciones. ■

Observación. *Para $f(t), g(t) \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ se tiene*

$$(f(t) + g(t))' = f'(t) + g'(t).$$

Demostración. Evidente de la definición. ■

Observación (Regla de Leibniz)**.** *Para $f(t), g(t) \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ se tiene*

$$(f(t) \cdot g(t))' = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t).$$

Demostración. Para $f(t) = \sum_{k\geq 0} a_k\, t^k$ y $g(t) = \sum_{k\geq 0} b_k\, t^k$

$$\begin{aligned}
\left(\left(\sum_{k\geq 0} a_k\, t^k\right)\cdot\left(\sum_{k\geq 0} b_k\, t^k\right)\right)' &= \left(\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{0\leq i\leq k} a_i\, b_{k-i}\right)\, t^k\right)' \\
&= \sum_{k\geq 1} k\left(\sum_{0\leq i\leq k} a_i\, b_{k-i}\right)\, t^{k-1} \\
&= \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{0\leq i\leq k} i\, a_i\, b_{k-i} + \sum_{0\leq i\leq k} (k-i)\, a_i\, b_{k-i}\right)\, t^{k-1} \\
&= \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{0\leq i\leq k} i\, a_i\, b_{k-i}\right)\, t^{k-1} + \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{0\leq i\leq k-1} a_i\,(k-i)\, b_{k-i}\right)\, t^{k-1} \\
&= f'(t)\cdot g(t) + f(t)\cdot g'(t).
\end{aligned}$$

■

Ejercicio. *Demuestre que para $f(t), g(t) \in \mathbb{Q}((t))$ se tiene*

$$\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)' = \frac{f'(t)\cdot g(t) - f(t)\cdot g'(t)}{g(t)^2}.$$

Corolario. *Para $f(t) \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ se tiene*

$$(f(t)^k)' = k\, f(t)'\, f(t)^{k-1}.$$

Demostración. Por inducción, usando la regla de Leibniz. ■

Observación (Regla de la cadena)**.** *Sean $f(t), g(t) \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ dos series de potencias formales tales que $g(0) = 0$. Entonces para la composición se tiene*

$$(f(g(t)))' = f'(g(t))\cdot g'(t).$$

Demostración. Si $f(t) = \sum_{k\geq 0} a_k\, t^k$, entonces

$$(f(g(t)))' = \sum_{k\geq 1} k\, a_k\, g'(t)\,(g(t))^{k-1} = \left(\sum_{k\geq 1} k\, a_k\,(g(t))^{k-1}\right)\, g'(t) = f'(g(t))\cdot g'(t).$$

■

En PARI/GP:

```
? default (seriesprecision, 6)

? deriv (t*exp(t), t)
% = 1 + 2*t + 3/2*t^2 + 2/3*t^3 + 5/24*t^4 + 1/20*t^5 + 7/720*t^6 + O(t^7)
```

Para resumir, las derivadas formales se comportan como las derivadas habituales: son lineales, cumplen la regla de Leibniz y la regla de la cadena.

Logaritmo formal

Definición. *El **logaritmo formal** es la serie en $\mathbb{Q}[\![t]\!]$ definida por*

$$\ln(1+t) := \sum_{k\ge 1} (-1)^{k+1}\,\frac{t^k}{k}.$$

Observamos que la derivada formal de $\ln(1+t)$ es precisamente lo que se espera del logaritmo:

$$(\ln(1+t))' = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + \cdots.$$

En PARI/GP:

```
? log (1+t)
% = t - 1/2*t^2 + 1/3*t^3 - 1/4*t^4 + 1/5*t^5 + O(t^6)
```

Teorema. *Tenemos*

$$\ln(1+(e^t-1)) = t, \quad e^{\ln(1+t)} = 1+t,$$

en el sentido de sustitución de una serie formal en otra.

Las identidades del teorema nos dan un ejemplo de series inversas respecto a la composición:

Proposición. *Para una serie de potencias formal $f(t) = \sum_{k\ge 0} a_k\, t^k$ existe otra serie $g(t)$ tal que $g(0) = 0$ y $f(g(t)) = t$ si y solamente si $a_0 = 0$ y $a_1 \ne 0$. En este caso la serie $g(t)$ es única, y además se tiene $g(f(t)) = t$. Es decir, f y g son mutuamente inversas respecto a la composición.*

Demostración. La condición sobre a_0 y a_1 es necesaria: si existe $g(t) = \sum_{k\ge 0} b_k\, t^k$ con $b_0 = 0$ tal que $f(g(t)) = \sum_{k\ge 0} a_k\, g(t)^k = t$, entonces $a_0 = 0$ y $a_1\, b_1 = 1$.

Ahora sea $f(t)$ una serie con $a_0 = 0$ y $a_1 \ne 0$. Tenemos que encontrar una serie $g(t) = \sum_{k\ge 0} b_k\, t^k$ con $b_0 = 0$ tal que $f(g(t)) = t$. La última identidad implica que necesitamos poner $b_1 := a_1^{-1}$. Luego, para $k \ge 2$, el coeficiente de t^k en $f(g(t))$ es igual al coeficiente de t^k en la suma

$$a_1\, g(t) + a_2\, g(t)^2 + \cdots + a_k\, g(t)^k$$

(ya que $g(0) = 0$, en las potencias $g(t)^{k+1}, g(t)^{k+2}, \ldots$ ya no hay términos de grado k). Pero este coeficiente tiene que ser nulo, lo que nos da las ecuaciones

$$a_1\, b_k + (\text{algún polinomio en } a_2, a_3, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}) = 0.$$

Puesto que $a_1 \ne 0$, estas ecuaciones por inducción definen *de modo único* todos los coeficientes $b_2, b_3, b_4, \ldots$ Esto demuestra que $g(t)$ existe y es único.

Para ver que también se tiene $g(f(t)) = t$, notamos que en $g(t)$ también $b_0 = 0$ y $b_1 \ne 0$, entonces existe $h(t)$ tal que $g(h(t)) = t$. Luego,

$$\begin{aligned} t &= f(g(t)),\\ h(t) &= f(g(h(t))) = f(t),\\ g(h(t)) &= g(f(t)) = t. \end{aligned}$$

∎

En PARI/GP, la serie inversa respecto a la composición puede ser calculada por la función `serreverse`:

```
? serreverse (exp (t) - 1)
% = t - 1/2*t^2 + 1/3*t^3 - 1/4*t^4 + 1/5*t^5 - 1/6*t^6 + O(t^7)
```

Demostración del teorema. La primera tentación es calcular directamente los coeficientes de las series

$$\ln(1+(e^t-1)) \quad \text{y} \quad e^{\ln(1+t)},$$

pero esto no es tan fácil. Por ejemplo, las potencias de la serie e^t-1 tienen como coeficientes los números de Stirling:

$$\frac{(e^t-1)^\ell}{\ell!} = \sum_{k\ge\ell} \left\{ {k \atop \ell} \right\} \frac{t^k}{k!}.$$

Lo vamos a necesitar de todas maneras más adelante y ver las definiciones y las propiedades básicas de $\left\{ {k \atop \ell} \right\}$ en otra lección. Para el logaritmo también hay una fórmula parecida con otros números de Stirling:

$$\frac{\ln(1+t)^\ell}{\ell!} = (-1)^\ell \sum_{k\ge\ell} (-1)^k \left[{k \atop \ell} \right] \frac{t^k}{k!}.$$

Afortunadamente, por el momento se puede evitar esta pesadilla combinatoria. Primero notemos que gracias a la proposición de arriba, será suficiente demostrar que por ejemplo,

$$e^{\ln(1+t)} = 1+t,$$

y $\ln(1+(e^t-1)) = t$ se sigue automáticamente. Gracias a la serie de Taylor $f(t) = \sum_{k\ge0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, t^k$, podemos simplemente verificar que

$$\begin{aligned} e^{\ln(1+0)} &= 1, \\ (e^{\ln(1+t)})'(0) &= 1, \\ (e^{\ln(1+t)})''(0) &= 0, \\ (e^{\ln(1+t)})'''(0) &= 0, \\ &\cdots \end{aligned}$$

En efecto, $\ln(1+0) = 0$ y $e^0 = 1$. Luego, por la regla de la cadena,

$$(e^{\ln(1+t)})' = e^{\ln(1+t)}\, \frac{1}{1+t},$$

y así $(e^{\ln(1+t)})'(0) = 1$. La segunda derivada nos da

$$\begin{aligned} (e^{\ln(1+t)})'' &= \left(e^{\ln(1+t)}\, \frac{1}{1+t} \right)' \\ &= (e^{\ln(1+t)})'\, \frac{1}{1+t} - e^{\ln(1+t)}\, \frac{1}{(1+t)^2} \\ &= e^{\ln(1+t)}\, \frac{1}{1+t}\, \frac{1}{1+t} - e^{\ln(1+t)}\, \frac{1}{(1+t)^2} = 0. \end{aligned}$$

■