

# La función generatriz para $B_k$ . Polinomios de Bernoulli

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

28 de Febrero de 2017

## La función generatriz para $B_k$

**Teorema.** Los números de Bernoulli pueden ser definidos por

$$\frac{t e^t}{e^t - 1} = \sum_{k \geq 0} B_k \frac{t^k}{k!}.$$

Aunque se puede pensar en esta identidad como en la serie de Taylor para  $\frac{t e^t}{e^t - 1}$  en un entorno de 0, para nosotros esto significa nada más que el cociente de series formales  $\frac{t e^t}{e^t - 1}$  en  $\mathbb{Q}((t))$  es igual a la serie formal  $\sum_{k \geq 0} B_k \frac{t^k}{k!}$ .

*Demostración.* Tenemos que ver que la identidad

$$\left( \sum_{k \geq 0} B_k \frac{t^k}{k!} \right) (e^t - 1) = t e^t.$$

define los números de Bernoulli. Calculemos el producto al lado izquierdo:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k \geq 0} B_k \frac{t^k}{k!} \right) (e^t - 1) &= \left( \sum_{k \geq 0} B_k \frac{t^k}{k!} \right) \left( \sum_{k \geq 1} \frac{t^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{k \geq 1} \left( \sum_{0 \leq i \leq k-1} \frac{B_i}{i!} \frac{1}{(k-i)!} \right) t^k \\ &= \sum_{k \geq 1} \left( \sum_{0 \leq i \leq k-1} \frac{B_i}{i!} \frac{k!}{(k-i)!} \right) \frac{t^k}{k!} \\ &= \sum_{k \geq 1} \left( \sum_{0 \leq i \leq k-1} \binom{k}{i} B_i \right) \frac{t^k}{k!} \\ &\stackrel{???}{=} \sum_{k \geq 1} \frac{t^k}{(k-1)!} = t e^t. \end{aligned}$$

La última igualdad se cumple si y solamente si

$$\sum_{0 \leq i \leq k-1} \binom{k}{i} B_i = k.$$

Como hemos visto, esta identidad define los números de Bernoulli. ■

**Ejemplo.** Calculemos algunos términos de la serie formal  $\frac{te^t}{e^t-1}$ . Tenemos

$$e^t - 1 = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} + \dots = t \left( 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \frac{t^4}{5!} + \dots \right).$$

Luego,

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{1}{1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \frac{t^4}{5!} + \dots}$$

Podemos calcular la última serie usando la fórmula

$$\frac{1}{1+f(t)} = 1 - f(t) + f(t)^2 - f(t)^3 + f(t)^4 - \dots$$

Tenemos

$$\begin{aligned} & 1 - \left( \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \frac{t^4}{5!} + \dots \right) + \left( \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \frac{t^4}{5!} + \dots \right)^2 \\ & \quad - \left( \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \frac{t^4}{5!} + \dots \right)^3 + \left( \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \frac{t^4}{5!} + \dots \right)^4 - \dots \\ & = 1 - \left( \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{24} + \frac{t^4}{120} + \dots \right) + \left( \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{6} + \frac{5t^4}{72} + \dots \right) - \left( \frac{t^3}{8} + \frac{t^4}{8} + \dots \right) + \left( \frac{t^4}{16} + \dots \right) - \dots \\ & \qquad \qquad \qquad = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} + 0 \cdot t^3 - \frac{t^4}{720} + \dots \end{aligned}$$

Multiplicando las series, se obtiene

$$\frac{te^t}{e^t-1} = \left( 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \right) \cdot \left( 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} + 0 \cdot t^3 - \frac{t^4}{720} + \dots \right) = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{720} + \dots$$

y entonces

$$B_0 = 1, \quad B_1 = \frac{1}{2}, \quad B_2 = 2! \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -4! \cdot \frac{1}{720} = -\frac{1}{30}.$$



Por supuesto, el último ejemplo es un poco masoquista: todo esto se puede hacer en PARI/GP.

```
? ser = (t*exp(t))/(exp(t)-1)
% = 1 + 1/2*t + 1/12*t^2 - 1/720*t^4 + 1/30240*t^6 - 1/1209600*t^8 + 1/47900160*t^10
- 691/1307674368000*t^12 + 1/74724249600*t^14 + 0(t^16)

? vector (11,k, polcoeff(ser,(k-1),t)*(k-1)!)
% = [1, 1/2, 1/6, 0, -1/30, 0, 1/42, 0, -1/30, 0, 5/66]
```

En muchos libros (y también en PARI/GP) se usa otra convención para los números de Bernoulli según la cual  $B_1 = -\frac{1}{2}$ . En este caso la función generatriz es  $\frac{te^t}{e^t-1} - t = \frac{t}{e^t-1}$ .

**Ejemplo.** La fórmula  $\frac{te^t}{e^t-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{B_k}{k!} t^k$  nos permite demostrar que  $B_k = 0$  para  $k \geq 3$  impar. En efecto, para ignorar el caso excepcional  $B_1 = \frac{1}{2}$ , examinemos la función

$$f(t) := \frac{te^t}{e^t-1} - \frac{t}{2} = B_0 + \frac{B_2}{2!} t^2 + \frac{B_3}{3!} t^3 + \frac{B_4}{4!} t^4 + \frac{B_5}{5!} t^5 + \dots$$

Tenemos

$$f(t) = \frac{te^t}{e^t-1} - \frac{t}{2} = \frac{t(e^t-1+1)}{e^t-1} - \frac{t}{2} = \frac{t}{e^t-1} + \frac{t}{2}.$$

Luego,

$$f(-t) = \frac{(-t)e^{-t}}{e^{-t}-1} - \frac{(-t)}{2} = \frac{t}{e^t-1} + \frac{t}{2}.$$

Entonces,  $f(t) = f(-t)$ , lo que implica que los coeficientes impares de  $f(t)$  son nulos. ▲

Los números de Bernoulli también surgen en otras series. Por ejemplo, tenemos la siguiente

**Proposición.**

$$t \cot(t) = 1 + \sum_{k \geq 1} (-1)^k 2^{2k} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k}.$$

Esto ya tiene que ser interpretado analíticamente. Las series con números de Bernoulli para varias funciones como  $\tan(t)$ ,  $\cot(t)$ ,  $\tanh(t)$ ,  $\coth(t)$  fueron descubiertas por Euler.

*Demostración.* Se tiene

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \text{sen}(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} t \cot(t) &= t \frac{\cos(t)}{\text{sen}(t)} = it \frac{e^{it} + e^{-it}}{e^{it} - e^{-it}} = it \frac{e^{2it} + 1}{e^{2it} - 1} = -it + \frac{2it e^{2it}}{e^{2it} - 1} \\ &= -it + \sum_{k \geq 0} \frac{B_k \cdot (2it)^k}{k!} = 1 + \sum_{k \geq 1} (-1)^k 2^{2k} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k}. \end{aligned}$$

■

**Ejercicio (Euler).** Demuestre la identidad

$$(2k+1) B_{2k} = - \sum_{1 \leq \ell \leq k-1} \binom{2k}{2\ell} B_{2\ell} B_{2(k-\ell)} \quad \text{para } k \geq 2.$$

Por ejemplo, para  $k = 3$  tenemos

$$\underbrace{-7}_{=\frac{1}{42}} B_6 = \underbrace{\binom{6}{2} B_2 B_4}_{=15 \cdot \frac{1}{6} \cdot (-\frac{1}{30})} + \underbrace{\binom{6}{4} B_4 B_2}_{=15 \cdot (-\frac{1}{30}) \cdot \frac{1}{6}}$$

*Indicación:* considere la función generatriz para los números pares  $f(t) := \frac{te^t}{e^t-1} - \frac{t}{2} = \sum_{k \geq 0} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k}$ . Demuestre la identidad con la derivada formal  $f(t) - t f(t)' = f(t)^2 - \frac{t^2}{4}$ ; sustituya  $f(t)$  por  $\sum_{k \geq 0} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k}$  y compare los coeficientes de  $t^{2k}$ .

**Ejercicio.** Demuestre por inducción que  $(-1)^{k+1} B_{2k} > 0$  para todo  $k \geq 1$ .

*Indicación:* use el ejercicio anterior.

## Polinomios de Bernoulli

Hay varios modos de definir los polinomios de Bernoulli; el más común es por una función generatriz. Vamos a necesitar las series de potencias formales en dos variables:

$$\sum_{k,\ell \geq 0} a_{k,\ell} t^k x^\ell,$$

respecto a la suma término por término y multiplicación que extiende la multiplicación de polinomios en dos variables. Tenemos la serie formal  $\frac{t}{e^t-1} \in \mathbb{Q}[[t]] \subset \mathbb{Q}[[t, x]]$  y podemos multiplicarla por la serie

$$e^{tx} := \sum_{k \geq 0} \frac{t^k x^k}{k!} \in \mathbb{Q}[[t, x]].$$

Un momento de reflexión demuestra que el resultado es de la forma

$$(1) \quad \frac{t e^{tx}}{e^t - 1} := \sum_{k \geq 0} B_k(x) \frac{t^k}{k!},$$

donde  $B_k(x)$  son algunos polinomios en  $x$ .

**Definición.** El *polinomio de Bernoulli*  $B_k(x)$  es el polinomio definido por (1).

**Ejemplo.** Vamos a ver un poco más adelante cómo calcular los polinomios  $B_k(x)$ ; por el momento podemos obtener algunos de los primeros. Como hemos calculado arriba,

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{720} + \dots$$

Luego,

$$\frac{t}{e^t - 1} e^{tx} = \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} - \dots\right) \left(1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2} + \dots\right) = 1 + \left(x - \frac{1}{2}\right) t + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}\right) t^2 + \dots$$

de donde

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

▲

**Observación.** Para todo  $k \geq 0$ ,

$$B_k(1) = B_k$$

es el  $k$ -ésimo número de Bernoulli.

*Demostración.* Comparando (1) con la función generatriz  $\frac{t e^t}{e^t - 1} = \sum_{k \geq 0} B_k \frac{t^k}{k!}$ .

■

Resulta que el término constante de  $B_k(x)$  es también igual a  $B_k$ :

**Observación.** Para todo  $k \geq 0$

$$(2) \quad B_k(x+1) - B_k(x) = k x^{k-1}.$$

En particular, para  $x = 0$  y  $k \neq 1$  tenemos

$$B_k(1) = B_k(0) = B_k.$$

*Demostración.* Tenemos la identidad

$$\frac{t e^{(x+1)t}}{e^t - 1} - \frac{t e^{tx}}{e^t - 1} = t e^{tx},$$

de donde

$$\sum_{k \geq 0} (B_k(x+1) - B_k(x)) \frac{t^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} t^{k+1}.$$

Comparando los coeficientes de  $t^k$ , se obtiene (2). ■

Note que para  $k = 1$  tenemos  $B_1(0) = -\frac{1}{2}$  y  $B_1(1) = +\frac{1}{2}$ .

**Observación.** Para todo  $k \geq 0$

$$B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x).$$

(En particular, para  $x = 0$  tenemos  $B_k = (-1)^k B_k$  para  $k \geq 3$ , lo que implica que  $B_k = 0$  para  $k \geq 3$  impar, como ya hemos visto.)

*Demostración.* Usando funciones generatrices,

$$\sum_{k \geq 0} B_k(1-x) \frac{t^k}{k!} = \frac{t e^{(1-x)t}}{e^t - 1} = \frac{(-t) e^{x(-t)}}{e^{-t} - 1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k B_k(x) \frac{t^k}{k!}.$$

Los polinomios de Bernoulli pueden ser expresados en términos de los números de Bernoulli:

**Proposición.**

$$B_k(x) = \sum_{0 \leq i \leq k} (-1)^i \binom{k}{i} B_i x^{k-i}.$$

*Demostración.* Calculemos el producto de series de potencias

$$\frac{t}{e^t - 1} \cdot e^{tx}.$$

Tenemos

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{(-t) e^{-t}}{e^{-t} - 1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k B_k \frac{t^k}{k!}, \quad e^{tx} = \sum_{k \geq 0} \frac{(tx)^k}{k!}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k \geq 0} (-1)^k B_k \frac{t^k}{k!} \right) \cdot \left( \sum_{k \geq 0} \frac{(tx)^k}{k!} \right) &= \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{0 \leq i \leq k} (-1)^i \frac{1}{i!(k-i)!} B_i x^{k-i} \right) t^k \\ &= \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{0 \leq i \leq k} (-1)^i \binom{k}{i} B_i x^{k-i} \right) \frac{t^k}{k!}. \end{aligned}$$

**Proposición.** Para todo  $k \geq 1$  se tiene ■

$$B'_k(x) = k B_{k-1}(x), \quad \int_0^1 B_k(x) dx = 0.$$

*Demostración.* Hay varios modos de verificar esto. Se puede usar la expresión  $B_k(x) = \sum_{0 \leq i \leq k} (-1)^i \binom{k}{i} B_i x^{k-i}$ . También podemos tomar las derivadas formales de la identidad (??):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{t e^{tx}}{e^t - 1} \right) = \frac{t \cdot t e^{tx}}{e^t - 1} = t \sum_{k \geq 0} B_k(x) \frac{t^k}{k!} = \sum_{k \geq 1} B_{k-1}(x) \frac{t^k}{(k-1)!} = \sum_{k \geq 0} B'_k(x) \frac{t^k}{k!}.$$

Luego, para ver que  $\int_0^1 B_k(x) dx = 0$ , es suficiente observar que  $\int B_k(x) dx = \frac{1}{k+1} B_{k+1}(x) + C$ , donde  $B_{k+1}(0) = B_{k+1}(1)$ . ■

Esto nos da otra definición de los polinomios de Bernoulli:

**Definición alternativa.** Los polinomios  $B_k(x)$  están definidos por

$$B_0(x) := 1$$

y

$$B'_k(x) = k B_{k-1}(x), \quad \int_0^1 B_k(x) dx = 0 \quad \text{para } k \geq 1.$$

(En efecto, la identidad  $B'_k(x) = k B_{k-1}(x)$  define  $B_k(x)$  salvo el término constante, pero el último se recupera de la condición  $\int_0^1 B_k(x) dx = 0$ .) Recordemos que los polinomios  $S_k(x)$  que hemos estudiado en la primera lección satisfacen la identidad

$$S'_k(x) = k S_{k-1}(x) + B_k.$$

Esto significa que las derivadas  $S'_k(x)$  satisfacen la misma identidad que  $B_k(x)$ :

$$S''_k(x) = k S'_{k-1}(x).$$

Además, para  $k \neq 1$  tenemos  $B_k(0) = S'_k(0) =: B_k$ , y se ve que los polinomios de Bernoulli son simplemente las derivadas de los polinomios  $S_k(x)$ :

$$B_k(x) = S'_k(x), \quad \text{para } k \neq 1.$$

(El caso  $k = 1$  es excepcional:  $S_1(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x$ ,  $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ .)

Ahora podemos compilar fácilmente una lista de los primeros polinomios de Bernoulli:

$$B_0(x) = 1,$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},$$

$$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x,$$

$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42},$$

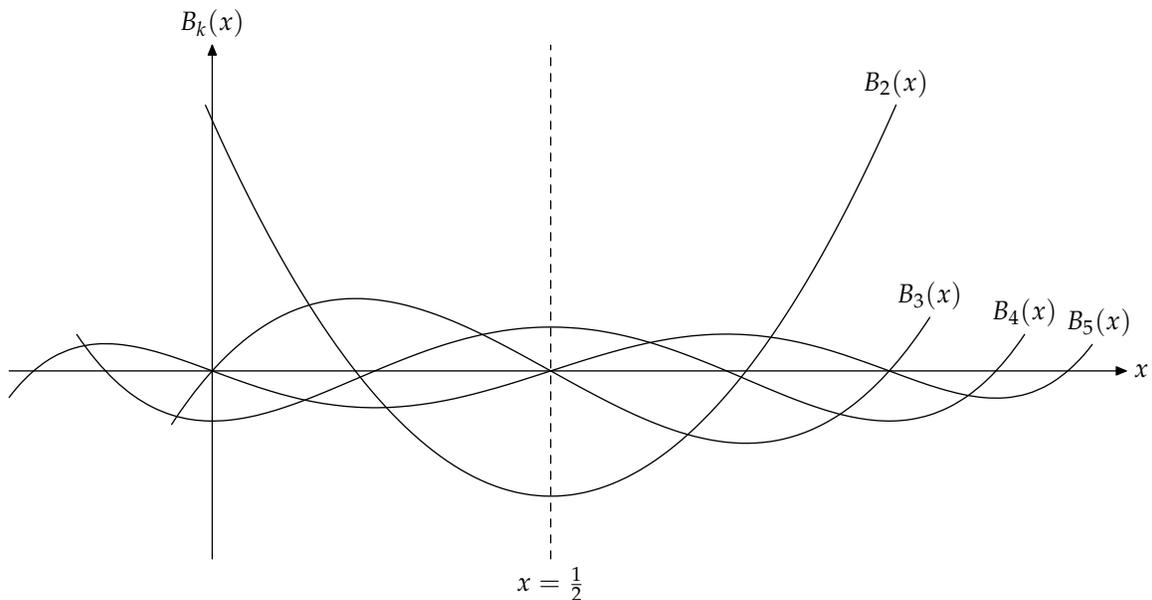
$$B_7(x) = x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x,$$

$$B_8(x) = x^8 - 4x^7 + \frac{14}{3}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{30},$$

$$B_9(x) = x^9 - \frac{9}{2}x^8 + 6x^7 - \frac{21}{5}x^5 + 2x^3 - \frac{3}{10}x,$$

$$B_{10}(x) = x^{10} - 5x^9 + \frac{15}{2}x^8 - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{66}.$$

Podemos dibujar algunas gráficas para visualizar la relación  $B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x)$ :



```
? Bpoly (k) = sum (i=0,k, (-1)^i * binomial(k,i) * B(i) * x^(k-i));
```

```
? vector (10,k,Bpoly(k))
```

```
% = [x - 1/2,  
      x^2 - x + 1/6,  
      x^3 - 3/2*x^2 + 1/2*x,  
      x^4 - 2*x^3 + x^2 - 1/30,  
      x^5 - 5/2*x^4 + 5/3*x^3 - 1/6*x,  
      x^6 - 3*x^5 + 5/2*x^4 - 1/2*x^2 + 1/42,  
      x^7 - 7/2*x^6 + 7/2*x^5 - 7/6*x^3 + 1/6*x,  
      x^8 - 4*x^7 + 14/3*x^6 - 7/3*x^4 + 2/3*x^2 - 1/30,  
      x^9 - 9/2*x^8 + 6*x^7 - 21/5*x^5 + 2*x^3 - 3/10*x,  
      x^10 - 5*x^9 + 15/2*x^8 - 7*x^6 + 5*x^4 - 3/2*x^2 + 5/66]
```

```
? deriv (Bpoly(10),x)
```

```
% = 10*x^9 - 45*x^8 + 60*x^7 - 42*x^5 + 20*x^3 - 3*x
```

```
? 10 * Bpoly(9)
```

```
% = 10*x^9 - 45*x^8 + 60*x^7 - 42*x^5 + 20*x^3 - 3*x
```

Para comprobar los resultados, podemos directamente calcular la serie  $\frac{t e^{tx}}{e^t - 1}$ :

```
? ser = t*exp (t*x) / (exp (t) - 1);
```

```
? polcoeff (ser,10,t)*10!
```

```
% = x^10 - 5*x^9 + 15/2*x^8 - 7*x^6 + 5*x^4 - 3/2*x^2 + 5/66
```

También podemos calcular las derivadas de  $S_k(x)$ :

```
? deriv (S(10),x)
```

```
% = x^10 + 5*x^9 + 15/2*x^8 - 7*x^6 + 5*x^4 - 3/2*x^2 + 5/66
```

En PARI/GP, la función predefinida `bernpol(k)` devuelve el polinomio de Bernoulli  $B_k(x)$ :

```
? bernalpol(1)
```

```
% = x - 1/2
```

```
? bernalpol(2)
```

```
% = x^2 - x + 1/6
```

```
? bernalpol(3)
```

```
% = x^3 - 3/2*x^2 + 1/2*x
```