Álgebra I. Tarea 3: Anillos
Universidad de El Salvador. Fecha límite: 12.04.2018

Por cualquier pregunta, no duden en contactarme por correo electrónico cadadr@gmail.com.

Ejercicio 3.1. *Sea p un número primo. Demuestre que los coeficientes binomiales $\binom{p}{i}$ son divisibles por p para $i = 1, \ldots, p-1$.*

Ejercicio 3.2. *Para $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ consideremos la raíz de la unidad $\zeta_n := e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$.*

1) *Demuestre la identidad $1 + \zeta_n + \zeta_n^2 + \cdots + \zeta_n^{n-1} = 0$.*
2) *Consideremos el conjunto*

$$\mathbb{Z}[\zeta_n] := \{a_0 + a_1\,\zeta_n + a_2\,\zeta_n^2 + \cdots + a_{n-1}\,\zeta_n^{n-1} \mid a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Demuestre que es un anillo conmutativo respecto a la suma y adición habitual de los números complejos.

Ejercicio 3.3. *Deduzca de los axiomas de anillos las siguientes propiedades:*

$$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0, \quad x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -xy, \quad x\,(y-z) = xy - xz, \quad (x-y)\,z = xz - yz$$

para cualesquiera $x, y, z \in R$.

Ejercicio 3.4. *En un anillo R puede ser que $0 = 1$. Pero en este caso R tiene solo un elemento.*

1) *Demuestre que un conjunto $R = \{0\}$ que consiste en un elemento puede ser dotado de modo único de una estructura de un anillo conmutativo. Este anillo se llama el **anillo nulo**.*
2) *Demuestre que si en un anillo R se cumple $1 = 0$, entonces $R = \{0\}$.*

Ejercicio 3.5. *Para un número fijo $n = 1, 2, 3, \ldots$ consideremos el conjunto de fracciones con n en el denominador:*

$$\mathbb{Z}[1/n] := \left\{ \frac{m}{n^k} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z},\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots \right\} \subset \mathbb{Q}.$$

De modo similar, para un número primo fijo $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ consideremos las fracciones con denominador no divisible por p:

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ p \nmid b \right\} \subset \mathbb{Q}.$$

Verifique que $\mathbb{Z}[1/n]$ y $\mathbb{Z}_{(p)}$ son anillos conmutativos respecto a la suma y producto habituales.

Ejercicio 3.6. *Sea R un anillo conmutativo. Una **serie formal de potencias** con coeficientes en R en una variable X es una suma formal*

$$f = \sum_{i \geq 0} a_i\, X^i,$$

donde $a_i \in R$. A diferencia de polinomios, se puede tener un número infinito de coeficientes no nulos. Las sumas y productos de series formales están definidos por

$$\sum_{i\geq 0} a_i\, X^i + \sum_{i\geq 0} b_i\, X^i := \sum_{i\geq 0} (a_i + b_i)\, X^i, \quad \left(\sum_{i\geq 0} a_i\, X^i\right) \cdot \left(\sum_{i\geq 0} b_i\, X^i\right) := \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) X^k.$$

1) *Note que las series formales forman un anillo conmutativo. Este se denota por $R[\![X]\!]$.*

2) *Verifique la identidad*
$$(1+X)\cdot(1-X+X^2-X^3+X^4-X^5+\cdots)=1$$
en $R[\![X]\!]$ *(es decir, los coeficientes de la serie formal al lado derecho son* $a_0=1$ *y* $a_i=0$ *para* $i>0$*).*

3) *Para* $R=\mathbb{Q}$ *verifique la identidad* $\left(\sum_{i\geq 0}\frac{X^i}{i!}\right)^n=\sum_{i\geq 0}\frac{n^i}{i!}X^i$ *en el anillo de series formales* $\mathbb{Q}[\![X]\!]$.

Ejercicio 3.7. *Para una serie de potencias* $f\in R[\![X]\!]$ *sea* $v(f)$ *el mínimo índice tal que el coeficiente correspondiente no es nulo:*
$$v(f):=\text{mín}\{i \mid a_i\neq 0\};$$
y si $f=0$*, pongamos* $v(0):=+\infty$.

1) *Demuestre que para cualesquiera* $f,g\in R[\![X]\!]$ *se cumple la desigualdad*
$$v(fg)\geq v(f)+v(g)$$
y la igualdad $v(fg)=v(f)+v(g)$ *si* R *es un dominio de integridad.*

2) *Demuestre que* $R[\![X]\!]$ *es un dominio de integridad si y solamente si* R *lo es.*

Ejercicio 3.8. *Sea* R *un anillo conmutativo. En el anillo de matrices* $M_n(R)$ *denotemos por* e_{ij} *para* $1\leq i,j\leq n$ *la matriz cuyos coeficientes son nulos, salvo el coeficiente* (i,j) *que es igual a* 1. *Sea* $A\in M_n(R)$ *una matriz arbitraria de* $n\times n$ *con coeficientes en* R.

1) *Demuestre que en el producto de matrices* $e_{ij}\,A$ *la fila* i *es igual a la fila* j *de* A *y el resto de los coeficientes son nulos.*

2) *Demuestre que en el producto de matrices* $A\,e_{ij}$ *la columna* j *es igual a la columna* i *de* A *y el resto de los coeficientes son nulos.*

3) *Demuestre que*
$$e_{ij}\,A=A\,e_{ij}$$
para todo $1\leq i,j\leq n$, $i\neq j$ *si y solamente si* A *es una* ***matriz escalar****:*
$$A=aI=\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a\end{pmatrix}$$
para algún $a\in R$.

4) *Concluya que las únicas matrices en* $M_n(R)$ *que conmutan con todas las matrices son las matrices escalares.*