

Álgebra I. Hoja de ejercicios 9: Acciones

Universidad de El Salvador, ciclo impar 2018

Por cualquier pregunta, no duden en contactarme por correo electrónico cadadr@gmail.com.

Ejercicio 9.1. Consideremos la acción del grupo $SL_2(\mathbb{R})$ sobre \mathcal{H} . Demuestre que el estabilizador para el punto $\sqrt{-1} \in \mathcal{H}$ es el grupo

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi \\ \operatorname{sen} \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \mid 0 \leq \phi < 2\pi \right\} = O_2(\mathbb{R}) \cap SL_2(\mathbb{R}).$$

Ejercicio 9.2. Demuestre que el núcleo de la acción de $SL_2(\mathbb{R})$ sobre \mathcal{H} es el subgrupo $Z(SL_2(\mathbb{R})) = \{\pm I\}$.

Ejercicio 9.3. Sea p un número primo y sea X un G -conjunto finito. Supongamos que para todo subgrupo $H \subsetneq G$ su índice es divisible por p :

$$p \mid |G : H|.$$

Deduzca que el número de los puntos fijos es congruente módulo p al número de los elementos de X :

$$|X| \equiv |X^G| \pmod{p}.$$

Indicación: considere la ecuación de clase.

Ejercicio 9.4. Demuestre que si G es un grupo finito de orden p^2 , entonces G es abeliano.

Ejercicio 9.5. Supongamos que un grupo finito G actúa sobre un conjunto finito X . Para un elemento $g \in G$ denotemos por X^g el conjunto de todos los puntos fijos por g :

$$X^g := \{x \in X \mid g \cdot x = x\}.$$

Demuestre que

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Deduzca la siguiente identidad combinatoria*:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

(en palabras: el número de órbitas es igual al número promedio de puntos fijos).

Indicación: use las biyecciones $O_x \cong G/G_x$.

Ejercicio 9.6. Verifique la descripción de las clases de conjugación en A_5 que vimos en clase.

Ejercicio 9.7. Encuentre las clases de conjugación en el grupo de cuaterniones Q_8 .

Ejercicio 9.8. En este ejercicio encontraremos las clases de conjugación del grupo diédrico D_n .

- 1) Demuestre que cada rotación r^i está conjugada con r^{-i} y consigo misma.
- 2) Demuestre que la clase de conjugación de la reflexión fr^i viene dada por las reflexiones fr^{i-2j} para $j \in \mathbb{Z}$.
- 3) Termine la descripción de las clases de conjugación. (La respuesta depende de la paridad de n .)

*Esta identidad se conoce como el **lema de Burnside** y es muy común en combinatoria y matemáticas recreativas.

Ejercicio 9.9. Hemos visto que $\mathbb{P}^1(k) = \mathbb{A}^1(k) \sqcup \{\infty\}$.

1) Demuestre que en general $\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{A}^n(k) \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(k)$.

2) Deduzca que $\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{A}^n(k) \sqcup \mathbb{A}^{n-1}(k) \sqcup \dots \sqcup \mathbb{A}^0(k)$.

3) Calcule el número de puntos en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_p)$ usando 2).

4) Calcule el mismo número a partir de la definición $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_p) := (\mathbb{A}^{n+1}(\mathbb{F}_p) \setminus \{0\})/\mathbb{F}_p^\times$.

Ejercicio 9.10. Describa la permutación de $\{0, 1, 2, 3, 4, \infty\}$ que corresponde a la acción de $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ sobre $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$.