Universidad de El Salvador. 12.12.2018
Álgebra II. Examen parcial 2 (repetido)

Problema 1 (2 puntos)**.** Encuentre el polinomio mínimo de $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ sobre $\mathbb{Q}$.

Problema 2 (2 puntos)**.** Consideremos el polinomio $f := X^2 + X + 2 \in \mathbb{F}_p[X]$.

a) ¿Para cuáles primos p el polinomio es irreducible? [1 *punto*]

b) ¿Para cuáles primos p el polinomio es separable? [1 *punto*]

Problema 3 (2 puntos)**.** Sean p un número primo y $n = 1, 2, 3, \ldots$ Para $\alpha \in \mathbb{F}_{p^n}$ definamos

$$N(\alpha) := \alpha\,\alpha^p\,\alpha^{p^2} \cdots \alpha^{p^{n-1}}.$$

a) Demuestre que $N(\alpha) \in \mathbb{F}_p$ para todo $\alpha \in \mathbb{F}_{p^n}$. [$\frac{1}{2}$ *punto*]

b) Demuestre que
$$N(\alpha\beta) = N(\alpha)\,N(\beta), \quad N(a\alpha) = a^n\,N(\alpha)$$
para cualesquiera $a \in \mathbb{F}_p$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_{p^n}$. [$\frac{1}{2}$ *punto*]

c) Demuestre que el homomorfismo de grupos multiplicativos $N\colon \mathbb{F}_{p^n}^\times \to \mathbb{F}_p^\times$ es sobreyectivo. [1 *punto*]

Indicación: demuestre que $|\ker N| = \frac{p^n-1}{p-1}$ e use el primer teorema de isomorfía.

Problema 4 (2 puntos)**.** Sean p un número primo y $n = 1, 2, 3, \ldots$ Consideremos el endomorfismo de Frobenius $F\colon x \mapsto x^p$ sobre $\mathbb{F}_{p^n}$. Hemos probado en clase que es una aplicación $\mathbb{F}_p$-lineal. Encuentre su polinomio característico.