Álgebra II. Hoja de ejercicios 3: Anillos cociente y productos de anillos
Universidad de El Salvador, ciclo par 2018

Por cualquier pregunta, no duden en escribir al grupo ues-algebra-2@googlegroups.com.

Ejercicio 1. *Sea R un anillo conmutativo y sea $N(R)$ su nilradical. Demuestre que el anillo cociente $R/N(R)$ no tiene nilpotentes; es decir, $N(R/N(R)) = 0$.*

Ejercicio 2. *Sea R un anillo conmutativo y sea $I \subseteq R$ un ideal. Demuestre que $M_n(R)/M_n(I) \cong M_n(R/I)$.*

Ejercicio 3. *Sea k un cuerpo y $c \in k$. Consideremos el homomorfismo de evaluación*

$$ev_c \colon k[X] \to k, \quad f \mapsto f(c).$$

1) *Demuestre que $\ker ev_c = (X - c)$ es el ideal generado por el polinomio lineal $X - c$.*

2) *Deduzca del primer teorema de isomorfía que $k[X]/(X - c) \cong k$.*

3*) *De modo similar, demuestre que para $c_1, \ldots, c_n \in k$ se tiene $k[X_1, \ldots, X_n]/(X_1 - c_1, \ldots, X_n - c_n) \cong k$.*
Sugerencia: considere el automorfismo de $k[X_1, \ldots, X_n]$ dado por $X_i \mapsto X_i + c_i$.

Ejercicio 4. *Demuestre que el cociente $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 5)$ es isomorfo al cuerpo*

$$\mathbb{Q}(\sqrt{-5}) := \{x + y\sqrt{-5} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$$

(en particular, verifique que $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ es un cuerpo).

Ejercicio 5. *Para el anillo de los enteros de Gauss $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ demuestre que*

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]/(1 + \sqrt{-1}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]/(1 + 2\sqrt{-1}) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}.$$

Ejercicio 6. *Consideremos el anillo de los enteros de Gauss $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ y los ideales*

$$I = (1 + \sqrt{-1}), \quad J = (1 + 2\sqrt{-1}).$$

1) *Demuestre que $I + J = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$.*

2) *Demuestre que $IJ = (1 - 3\sqrt{-1})$.*
Sugerencia: note que en cualquier anillo conmutativo, se tiene $(x) \cdot (y) = (xy)$ para cualesquiera $x, y \in R$.

3) *Demuestre que $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]/(1 - 3\sqrt{-1}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ usando el teorema chino del resto.*

Ejercicio 7. *Demuestre el segundo teorema de isomorfía para anillos.*

Ejercicio 8. *Demuestre el tercer teorema de isomorfía para anillos.*

Ejercicio 9. *Sean R y S anillos y sean $I \subseteq R$, $J \subseteq S$ ideales bilaterales.*

1) *Demuestre que*

$$I \times J := \{(x, y) \mid x \in I,\ y \in J\}$$

es un ideal bilateral en el producto $R \times S$.

2) *Demuestre que todos los ideales bilaterales en $R \times S$ son de esta forma.*
Sugerencia: para un ideal bilateral $A \subseteq R \times S$ considere $I = p_1(A)$ y $J = p_2(A)$ donde

$$\begin{array}{ccccc} R & \xleftarrow{p_1} & R \times S & \xrightarrow{p_2} & S \\ r & \longleftarrow\!\shortmid & (r,s) & \longmapsto & s \end{array}$$

son las proyecciones canónicas.

Ejercicio 10.

1) *Sean R y S dos anillos no nulos. Demuestre que el producto $R \times S$ tiene divisores de cero.*

2) *Demuestre que el producto de dos anillos no nulos nunca es un cuerpo.*