# Álgebra II. Hoja de ejercicios 4: Ideales primos y maximales. Localización Universidad de El Salvador, ciclo par 2018

Por cualquier pregunta, no duden en escribir al grupo ues-algebra-2@googlegroups.com.

## Ideales primos y maximales

**Ejercicio 1.** *Sea $R$ un anillo conmutativo y sea $\mathfrak{p} \subset R$ un ideal primo. Demuestre que si $x^n \in \mathfrak{p}$ para algún $x \in R$ y $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces $x \in \mathfrak{p}$.*

**Ejercicio 2.** *Sea $f\colon R \to S$ un homomorfismo de anillos conmutativos. Para un ideal primo $\mathfrak{p} \subset S$ verifique directamente que $f^{-1}(\mathfrak{p})$ es un ideal primo en $R$.*

**Ejercicio 3.** *Sea $R$ un anillo conmutativo y sea $\mathfrak{p} \subset R$ un ideal primo.*

1) *Demuestre que para dos ideales $I, J \subseteq R$, si $IJ \subseteq \mathfrak{p}$, entonces $I \subseteq \mathfrak{p}$ o $J \subseteq \mathfrak{p}$.*

2) *Demuestre que si para un ideal $I \subseteq R$ se tiene $I^n \subseteq \mathfrak{p}$ para algún $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces $I \subseteq \mathfrak{p}$.*

**Ejercicio 4.** *Sea $R$ un anillo conmutativo. Para un subconjunto $S \subseteq R$ sea $V(S)$ el conjunto de los ideales primos que contienen a $S$:*

$$V(S) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{p} \supseteq S\}.$$

1) *Demuestre que para $S_1 \subseteq S_2 \subseteq R$ se tiene $V(S_2) \subseteq V(S_1)$.*

2) *Demuestre que $V(S) = V(I)$ donde $I = (S)$ es el ideal generado por $S$.*

3) *Demuestre que $V(0) = \operatorname{Spec} R$ y $V(1) = \emptyset$.*

4) *Demuestre que $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$ para ideales $I, J \subseteq R$.*

5) *Demuestre que $\bigcap_k V(I_k) = V(\sum_k I_k)$ para ideales $I_k \subseteq R$.*

**Ejercicio 5.** *Sean $R$ y $S$ anillos conmutativos. Consideremos el producto $R \times S$ con las proyecciones canónicas*

$$\begin{array}{ccccc} R & \xleftarrow{\pi_1} & R \times S & \xrightarrow{\pi_2} & S \\ r & \longleftarrow\!\shortmid & (r,s) & \longmapsto & s \end{array}$$

1) *Si $\mathfrak{p} \subset R$ y $\mathfrak{q} \subset S$ son ideales primos, demuestre que*

$$\mathfrak{p} \times S := \pi_1^{-1}(\mathfrak{p}) = \{(x,s) \mid x \in \mathfrak{p},\ s \in S\}, \quad R \times \mathfrak{q} = \pi_2^{-1}(\mathfrak{q}) := \{(r,y) \mid r \in R,\ y \in \mathfrak{q}\}$$

   *son ideales primos en el producto $R \times S$.*

2) *Demuestre que si $\mathfrak{P} \subset R \times S$ es un ideal primo, entonces $\mathfrak{P}$ es de la forma $\mathfrak{p} \times S$ o $R \times \mathfrak{q}$ como en 1).*
   *Indicación: para $e_1 := (1_R, 0_S)$ y $e_2 := (0_R, 1_S)$ note que $e_1 e_2 \in \mathfrak{P}$, así que $e_1 \in \mathfrak{P}$ o $e_2 \in \mathfrak{P}$.*

*Ensto nos da una biyección natural $\operatorname{Spec}(R \times S) \cong \operatorname{Spec} R \sqcup \operatorname{Spec} S$.*

**Ejercicio 6.** *Sea $R$ un anillo conmutativo. Sea $U \subset R$ un subconjunto no vacío tal que $0 \notin U$ y si $x, y \in U$, entonces $xy \in U$.*

1) *Deduzca del lema de Zorn que existe un ideal $\mathfrak{p} \subset R$ que satisface las siguientes propiedades:*

   - *$U \cap \mathfrak{p} = \emptyset$,*
   - *Si $\mathfrak{p} \subseteq I$ para otro ideal $I$ que satisface $U \cap I = \emptyset$, entonces $I = \mathfrak{p}$.*

2) *Demuestre que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo.*

*Indicación: basta revisar y entender nuestra prueba de que $N(R) = \bigcap_{\mathfrak{p} \subset R \text{ primo}} \mathfrak{p}$.*

## Localización

**Ejercicio 7.** *En el cuerpo de las series de Laurent* $\mathbb{Q}((X))$*, encuentre el elemento inverso de* $X - X^2$.

**Ejercicio 8.** *Describa los cuerpos de fracciones* $K(R)$ *para los anillos* $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}], \mathbb{Z}[\sqrt{5}], \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

**Ejercicio 9.** *Sea* $R \times S$ *un producto de anillos conmutativos no nulos. Consideremos* $e := (1,0)$*. Demuestre que* $(R \times S)[e^{-1}] \cong R$.

**Ejercicio 10.** *Consideremos el anillo finito* $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *donde* $n = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$.

1) *Demuestre que los ideales maximales en* $R$ *son* $\mathfrak{m}_i = p_i\,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *para* $i = 1, \ldots, s$.

2) *Demuestre que* $R \cong R_{\mathfrak{m}_1} \times \cdots \times R_{\mathfrak{m}_s}$.

**Ejercicio 11 (*).** *Supongamos que* $\psi\colon R \to S$ *es un homomorfismo de anillos que satisface la misma propiedad universal que el homomorfismo de localización* $\phi\colon R \to R[U^{-1}]$:

1) *para todo* $u \in U$ *el elemento* $\psi(u)$ *es invertible en* $S$;

2) *si* $S'$ *es otro anillo junto con un homomorfismo* $f\colon R \to S'$ *tal que* $f(u)$ *es invertible en* $S'$ *para todo* $u \in U$*, entonces* $f$ *se factoriza de modo único por* $\psi$:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"'] & S' \\ S \arrow[ur, dashed, "\exists!\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

*Demuestre que existe un isomorfismo único* $R[U^{-1}] \to S$ *que hace conmutar el diagrama*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"'] & S \\ R[U^{-1}] \arrow[ur, dashed, "\cong", "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

*(Aplique la propiedad universal de* $\phi$ *a* $\psi$ *y luego la propiedad universal de* $\psi$ *a* $\phi$*.)*