Álgebra II. Hoja de ejercicios 6: Aritmética
Universidad de El Salvador, ciclo par 2018

Por cualquier pregunta, no duden en escribir al grupo ues-algebra-2@googlegroups.com.

Ejercicio 1. *Hemos notado que el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ no es un dominio de factorización única. En este ejercicio vamos a probar que en efecto $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ no es un dominio de ideales principales. De nuevo, nos va a servir la norma*

$$N(a+b\sqrt{-5}) := (a+b\sqrt{-5})\,(a-b\sqrt{-5}) = a^2+5\,b^2.$$

Consideremos el ideal $I = (3, 2+\sqrt{-5})$. Supongamos que $I = (\alpha)$ para algún $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. En particular, existen $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ tales que

$$3 = \beta\alpha, \quad 2+\sqrt{-5} = \gamma\alpha.$$

Analice las normas y obtenga una contradicción. Concluya que el ideal I no es principal.

Ejercicio 2. *Sea $n \geq 3$ un entero libre de cuadrados. En este ejercicio vamos a probar que el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$ no es un dominio de factorización única. (Los anillos $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ y $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ son dominios euclidianos y por ende sí son dominios de factorización única.) Consideremos la norma*

$$N(a+b\sqrt{-n}) := (a+b\sqrt{-n})\,(a-b\sqrt{-n}) = a^2+n\,b^2.$$

1) *Demuestre que 2 es irreducible en $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.*
2) *Demuestre que $1 \pm \sqrt{-n}$ es irreducible en $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.*
   Indicación: si $1 \pm \sqrt{-n} = xy$ para $x, y \notin \mathbb{Z}[\sqrt{-n}]^\times$, analice las normas.
3) *Si n es par, demuestre que $2 \mid (\sqrt{-n})^2$, pero $2 \nmid \sqrt{-n}$.*
4) *Si n es impar, demuestre que $2 \mid (1+\sqrt{-n})\,(1-\sqrt{-n})$, pero $2 \nmid (1 \pm \sqrt{-n})$.*

Concluya que 2 es un elemento irreducible, pero no es primo, así que $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$ no puede ser un dominio de factorización única.

Ejercicio 3. *Ya sabemos que los enteros de Gauss $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ forman un dominio de factorización única. En este ejercicio vamos a describir los elementos primos (irreducibles) en $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$. Para encontrarlos, hay que factorizar los enteros primos $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ en $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$.*

1) *Demuestre que si para un elemento $\pi = a + b\sqrt{-1} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ la norma $N(\pi) = a^2 + b^2 = p$ es un número entero primo, entonces π es un elemento primo en $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$.*
2) *Sea π un elemento primo en $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$. Demuestre que $\pi \mid p$ donde p es un número entero primo. Factorice $2, 3, 5$ en elementos primos en $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$.*
   Sugerencia: note que $\pi \mid N(\pi)$.
3) *Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número entero primo. Demuestre que p es compuesto en $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ si y solamente si $p = a^2 + b^2$ para algunos $a, b \in \mathbb{Z}$, y en este caso p se descompone en dos factores primos conjugados.*

Comentario. En la teoría de números elemental se demuestra que un primo $p \in \mathbb{Z}$ puede ser escrito como una suma de dos cuadrados $a^2 + b^2$ si y solamente si $p = 2$ o $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Ejercicio 4. *Demuestre que el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ es un dominio euclidiano respecto a la norma habitual*

$$N(a+b\sqrt{-2}) := (a+b\sqrt{-2})\,(a-b\sqrt{-2}) = a^2+2\,b^2.$$

Ejercicio 5. *Demuestre que el anillo $\mathbb{Z}[\omega]$ donde $\omega := \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ es un dominio euclidiano respecto a la norma habitual*

$$N(a+b\,\omega) := (a+b\,\omega)\,(a+b\,\overline{\omega}) = a^2+ab+b^2.$$

Ejercicio 6. *Sea p un número primo. Para el anillo $\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z},\ p \nmid b \right\}$ definamos*

$$v_p\left(\frac{a}{b}\right) := \text{máx}\{k \mid p^k \mid a\}, \quad v_p(0) := +\infty.$$

1) *Demuestre que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Z}_{(p)}$ se cumple*

$$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y).$$

2) *Demuestre que todo elemento no nulo $x \in \mathbb{Z}_{(p)}$ puede ser escrito como up^n donde $u \in \mathbb{Z}_{(p)}^\times$ y $n = v_p(x)$.*

3) *Demuestre que todo elemento irreducible en $\mathbb{Z}_{(p)}$ está asociado con p.*

4) *Demuestre que $\mathbb{Z}_{(p)}$ es un dominio euclidiano respecto a v_p.*

Ejercicio 7. *Sea k un cuerpo. Consideremos el anillo de las series de potencias $k[\![X]\!]$. Definamos para $f = \sum_{i\ge 0} a_i\,X^i \in k[\![X]\!]$*

$$v_X(f) := \text{máx}\{i \mid a_i = 0\}, \quad v_X(0) := +\infty.$$

1) *Demuestre que para cualesquiera $f, g \in k[\![X]\!]$ se cumple*

$$v_X(fg) = v_X(f) + v_X(g).$$

2) *Demuestre que toda serie no nula $f \in k[\![X]\!]$ puede ser escrita como $g\,X^n$ donde $g \in k[\![X]\!]^\times$ y $n = v_X(f)$.*

3) *Demuestre que todo elemento irreducible en $k[\![X]\!]$ está asociado con X.*

4) *Demuestre que $k[\![X]\!]$ es un dominio euclidiano respecto a v_X.*

Comentario. $\mathbb{Z}_{(p)}$ y $k[\![X]\!]$ son ejemplos de **anillos de valuación discreta**.

Ejercicio 8. *Sea R un dominio de integridad. Una* ***norma de Dedekind*** *es una función $\delta\colon R\setminus\{0\} \to \mathbb{N}$ que satisface la siguiente propiedad: para cualesquiera $x, y \in R\setminus\{0\}$, si $x \nmid y$, entonces existen $a, b \in R$ tales que*

$$ax + by \neq 0, \quad \delta(ax+by) < \delta(x).$$

Demuestre que si sobre R existe una norma de Dedekind, entonces R es un dominio de ideales principales.