Álgebra I: Teoría de Grupos
Examen parcial 1

Universidad de El Salvador. Ciclo impar 2018

Problema 1 (1 punto)**.** Consideremos los grupos simétricos S_n y grupos alternantes A_n. ¿Para cuáles valores de n son abelianos? Cuando no son abelianos, encuentre un par de permutaciones específicas σ, τ tales que $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$.

Problema 2 (1 punto)**.** Demuestre que un grupo G es abeliano si y solamente si para cualesquiera $g, h \in G$ se cumple
$$(gh)^2 = g^2 h^2.$$

Problema 3 (2 puntos)**.** Supongamos que $\sigma = (i_1 \ \cdots \ i_k)$ y $\tau = (j_1 \ \cdots \ j_\ell)$ son dos ciclos *disjuntos* en el grupo simétrico S_n; es decir,
$$\{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, \ldots, j_\ell\} = \emptyset.$$
Demuestre que el mínimo exponente $m = 1, 2, 3, \ldots$ tal que $(\sigma \circ \tau)^m = \mathrm{id}$ es igual a $\mathrm{mcm}(k, \ell)$.

Problema 4 (2 puntos)**.** Para el grupo simétrico S_5 calcule cuántas diferentes permutaciones $\sigma \in S_5$ satisfacen la propiedad $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$.

Problema 5 (2 puntos)**.**

1) Para un grupo G demuestre que el centro $Z(G)$ es un subgrupo de G.

2) Sea G un grupo y H su subgrupo. ¿Es cierto que $Z(H)$ es un subgrupo de $Z(G)$? (Demuéstrelo o encuentre un contraejemplo.)

Problema 6 (2 puntos)**.** Se dice que un número complejo $z \in \mathbb{C}$ es una **raíz n-ésima de la unidad** si $z^n = 1$.

1) Demuestre que todas las raíces n-ésimas de la unidad forman un grupo abeliano respecto a la multiplicación compleja. Denotémoslo por $\mu_n(\mathbb{C})$.

2) Demuestre que todas las raíces de la unidad
$$\mu_\infty(\mathbb{C}) := \bigcup_{n \geq 1} \mu_n(\mathbb{C})$$
también forman un grupo.