Álgebra I: Estructuras algebraicas y la teoría de grupos
Examen parcial 2 (diferido / repetido)

Universidad de El Salvador, 8.06.2018

Problema 1 (1 punto). Encuentre el orden de cada uno de los elementos del grupo diédrico

$$D_n = \{\mathrm{id}, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, f, fr, fr^2, \ldots, fr^{n-1}\}.$$

Para los siguientes dos problemas, consideremos los números complejos

$$\omega := \frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \overline{\omega} := \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$$

y el conjunto

$$\mathbb{Z}[\omega] := \{a + b\,\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

Problema 2 (1 punto). Demuestre que $\mathbb{Z}[\omega]$ es un anillo conmutativo respecto a la adición y multiplicación habitual de números complejos.

Problema 3 (2 puntos).

1) Demuestre que la aplicación

$$N\colon a + b\,\omega \mapsto (a + b\,\omega)\,(a + b\,\overline{\omega})$$

toma sus valores en $\mathbb{Z}$ y es multiplicativa: para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Z}[\omega]$ se cumple

$$N(xy) = N(x)\,N(y).$$

2) Demuestre que el grupo de unidades $\mathbb{Z}[\omega]^\times$ es cíclico de orden 6.

Problema 4 (2 puntos). Calcule la serie inversa para $1 - 2X + X^2 \in \mathbb{Z}[\![X]\!]$.

Problema 5 (2 puntos). Demuestre que las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

generan un subgrupo de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ que es isomorfo a S_3.

Problema 6 (2 puntos). Encuentre todos los homomorfismos entre el grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de los restos módulo n respecto a la adición y el grupo $\mathbb{C}^\times$ de los números complejos no nulos respecto a la multiplicación.