Álgebra I: Teoría de Grupos
Ejercicios sobre los números complejos

Universidad de El Salvador. Ciclo impar 2018

Asumo que el lector conozca alguna construcción de los números reales $\mathbb{R}$. Definamos los **números complejos** $\mathbb{C}$ como el conjunto de los pares de números reales (x, y) con la adición

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

y la multiplicación

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Para un número complejo $(x, y) \in \mathbb{C}$ el número x es su parte **real** y el número y es su parte **imaginaria**.

Ejercicio 1. *Demuestre que $\mathbb{C}$ es un anillo conmutativo. Demuestre que la ecuación $z^2 + 1 = 0$ tiene dos soluciones en $\mathbb{C}$.*

Fijemos una de las dos soluciones de la ecuación $z^2 + 1 = 0$ en $\mathbb{C}$ y denotémosla por* $\sqrt{-1}$.

Ejercicio 2. *Demuestre que todo número complejo puede ser representado de modo único como $x + y\sqrt{-1}$ donde $x, y \in \mathbb{R}$.*

Para un número complejo $z = x + y\sqrt{-1}$ su **conjugado** es el número

$$\overline{z} := x - y\sqrt{-1}.$$

Ejercicio 3. *Demuestre que la conjugación preserva la multiplicación y adición en $\mathbb{C}$:*

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$
$$\overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Para un número complejo $(x, y) \in \mathbb{C}$ el número

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

se llama el **valor absoluto** de z. Es la longitud del vector (x, y) en el plano real (la distancia entre el punto (x, y) y $(0, 0)$).

Ejercicio 4. *Demuestre que para todo número complejo $z = x + y\sqrt{-1}$ se tiene*

$$z\,\overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2.$$

Note que es un numero no negativo y es nulo si y solamente si $z = 0$.

*También es común la notación "i".

Ejercicio 5. *Deduzca del ejercicio anterior que los números complejos forman un cuerpo.*
Indicación: demuestre que $z^{-1} = \overline{z} \cdot |z|^{-2}$.

Ejercicio 6. *Demuestre que*

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 7. *Demuestre que el valor absoluto satisface la* ***desigualdad triangular****:*

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. ¿Cuándo se cumplen las igualdades?

Ejercicio 8. *Sea $z = x + y\sqrt{-1}$ un número complejo tal que $|z| = 1$. Consideremos la multiplicación por z como una transformación del plano $\mathbb{R}^2$, identificado de la manera habitual con $\mathbb{C}$. Demuestre que si $z \neq 1$, entonces esta transformación es una isometría del plano y su único punto fijo es $0 \in \mathbb{R}^2$.*

Ejercicio 9 (La interpretación trigonométrica de los números complejos). *Se sabe de geometría que una isometría del plano con el único punto fijo $0 \in \mathbb{R}^2$ es una rotación por algún ángulo ϕ respecto al punto 0. Demuestre que en el ejercicio anterior*

$$x + y\sqrt{-1} = \cos\phi + \operatorname{sen}\phi\,\sqrt{-1}.$$

El ángulo ϕ se llama el **argumento** de z.

Ejercicio 10 (Una identidad trigonométrica). *Demuestre que*

$$\operatorname{sen}(\phi + \psi) = \operatorname{sen}\phi\,\cos\psi + \cos\phi\,\operatorname{sen}\psi.$$

Indicación: use el ejercicio anterior.

Ejercicio 11 (Fórmula de De Moivre). *Demuestre que*

$$(\cos\phi + \sin\phi\,\sqrt{-1})^n = \cos(n\phi) + \sin(n\phi)\,\sqrt{-1}.$$

Indicación: use la interpretación trigonométrica de los números complejos.

Ejercicio 12. *Demuestre que la ecuación $z^n = 1$ tiene precisamente n soluciones complejas y son de la forma*

$$\zeta^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

para algún $\zeta \in \mathbb{C}$. Estos números se llaman las ***n-ésimas raíces de la unidad****.*
Indicación: de nuevo, use la interpretación trigonométrica de los números complejos.

Ejercicio 13 (Fórmula de Euler). *Demuestre que en el anillo de series de potencias $\mathbb{C}[\![z]\!]$ se cumple la identidad*

$$\exp(\sqrt{-1}\cdot z) = \cos(z) + \sqrt{-1}\cdot \operatorname{sen}(z),$$

donde

$$\exp(\sqrt{-1}\cdot z) := \sum_{k\ge 0} \frac{(\sqrt{-1})^k}{k!}\, z^k, \quad \cos(z) := \sum_{k\ge 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{2k}, \quad \operatorname{sen}(z) := \sum_{k\ge 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1}.$$

De hecho, en análisis se estudia que las series de arriba convergen para todo $z \in \mathbb{C}$ y estas normalmente se usan para *definir* la exponencial, coseno y seno.

Ejercicio 14. *Sean ζ^k ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) las raíces n-ésimas de la unidad. Calcule el producto*

$$\prod_{1\le k\le n-1} (1 - \zeta^k) \in \mathbb{C}.$$

Indicación: primero demuestre que en anillo de polinomios $\mathbb{Z}[X]$ se cumple

$$\frac{X^n - 1}{X - 1} = X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1.$$