Subgrupos del grupo diédrico D_4 (el ejercicio tedioso de la segunda tarea)

11 de abril de 2018

Consideremos el grupo diédrico

$$D_4 = \{\mathrm{id}, r, r^2, r^3, f, fr, fr^2, fr^3\}.$$

Para encontrar sus subgrupos, podemos analizar todos los casos posibles.

En general, si H es un subgrupo de un grupo finito G, entonces $|H|$ divide a $|G|$ (esto se llama el **teorema de Lagrange**). Esto implica que los subgrupos de D_4 necesariamente tienen orden

$$|H| = 1, 2, 4, 8.$$

Todavía no lo hemos demostrado, pero en el caso de D_4 se puede proceder sin usar este resultado. De hecho, el punto de este ejercicio era de tener más práctica con cálculos explícitos.

Primero notemos que

$$\{1, g\} \subset G$$

es un subgrupo de orden 2 si y solamente si $g^2 = 1$. Esto nos da la lista completa de los subgrupos de orden 2 en D_4:

$$\{\mathrm{id}, r^2\}, \quad \{\mathrm{id}, f\}, \quad \{\mathrm{id}, fr\}, \quad \{\mathrm{id}, fr^2\}, \quad \{\mathrm{id}, fr^3\}. \tag{*}$$

Ahora analicemos qué sucede si un subgrupo $H \subseteq D_4$ es de orden > 2. Esto quiere decir que en H hay por lo menos dos elementos $g, h \neq \mathrm{id}$.

1) Si $r \in H$ (resp. $r^3 \in H$), entonces todas las potencias de r (resp. r^3) están en H y tenemos

$$\{\mathrm{id}, r, r^2, r^3\} = \{\mathrm{id}, r^3, r^6, r^9\} \subseteq H.$$

En particular, $\{\mathrm{id}, r, r^2, r^3\}$ es un subgrupo.

2) Del caso anterior se ve que si $r^i, r^j \in H$ para diferentes $i, j \in \{1, 2, 3\}$, entonces

$$\{\mathrm{id}, r, r^2, r^3\} \subseteq H.$$

3) Notamos que si $r, f \in H$, entonces $H = D_4$ (todo elemento de D_n es un producto de r y f).

4) Supongamos que $fr^i, fr^j \in H$ para diferentes $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$. En este caso también

$$(fr^i)\,(fr^j) = r^{j-i} \in H.$$

- Si el número $j - i \equiv 1 \text{ o } 3 \pmod 4$, entonces
$$\{\mathrm{id}, r, r^2, r^3\} \subseteq H,$$
pero luego $f = (fr^i)\, r^{-i} \in H$ y podemos concluir que $H = D_4$.
- Si $j - i \equiv 2 \pmod 4$, entonces tenemos dos posibilidades: o bien $(i, j) = (0, 2)$, y en este caso
$$\{\mathrm{id}, f, fr^2, r^2\} \subseteq H,$$
o bien $(i, j) = (1, 3)$, y en este caso
$$\{\mathrm{id}, fr, fr^3, r^2\} \subseteq H.$$

5) Supongamos que $r^i, fr^j \in H$ para algunos $i \in \{1, 2, 3\}$ y $j \in \{0, 1, 2, 3\}$. En este caso también
$$fr^{j+i} = (fr^j) \cdot r^i \in H \quad \text{y} \quad fr^{j-i} = (fr^j) \cdot (r^i)^{-1} \in H.$$
Si $j + i \not\equiv j - i \pmod 4$, estamos en el caso precedente: tenemos dos elementos diferentes fr^i y fr^j. Si $j + i \equiv j - i \pmod 4$, entonces $i = 2$ y $r^2 \in H$. Se ve que
$$\{\mathrm{id}, r^2, f, fr^2\} \subseteq H \quad \text{o} \quad \{\mathrm{id}, r^2, fr, fr^3\} \subseteq H;$$
es decir, tenemos las mismas posibilidades que en 4).

Los casos 1)–5) cubren todas las posibilidades para $g, h \in H$ con $g, h \neq \mathrm{id}$. Hemos visto entonces que si $|H| > 2$, entonces H necesariamente contiene uno de los siguientes conjuntos:

$$(**) \qquad \{1, r, r^2, r^3\}, \quad \{\mathrm{id}, r^2, f, fr^2\}, \quad \{\mathrm{id}, r^2, fr, fr^3\}.$$

Se ve que estos son subgrupos de D_4. Ahora si supiéramos el teorema de Lagrange, podríamos concluir que en D_4 no hay otros subgrupos no triviales excepto (*) y (**). Pero de todos modos podemos analizar directamente todas las posibilidades.

a) Si H un subgrupo tal que $\{1, r, r^2, r^3\} \subsetneq H$, entonces $fr^i \in H$ para algún $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Pero en este caso, multiplicando fr^i por r, r^2, r^3, podemos concluir que $H = D_4$.

b) Sea H un subgrupo tal que $\{\mathrm{id}, r^2, f, fr^2\} \subsetneq H$.
   - Si $r \in H$, entonces $H = D_4$, siendo un subgrupo que contiene r y f.
   - Si $r^3 \in H$, entonces $r^2 \cdot r^3 = r \in H$ y de nuevo $H = D_4$.
   - Si $fr \in H$, entonces $r = f \cdot fr \in H$ y $H = D_4$.
   - Si $fr^3 \in H$, entonces $(fr^2) \cdot (fr^3) = r \in H$ y $H = D_4$.

c) De la misma manera, si $\{\mathrm{id}, r^2, fr, fr^3\} \subsetneq H$, entonces se puede ver que $H = D_4$.

Con esto podemos concluir que todo subgrupo de orden > 4 coincide con D_4. Así que el diagrama de abajo de hecho representa *todos* los subgrupos de D_4.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & D_4 & & & & \\
 & \{\mathrm{id}, f, r^2, fr^2\} \arrow[urrr] & & & \{\mathrm{id}, r, r^2, r^3\} \arrow[u] & & & \{\mathrm{id},\ fr, r^2, fr^3\} \arrow[ulll] & \\
\{\mathrm{id}, fr^2\} \arrow[ur] & & \{\mathrm{id}, f\} \arrow[ul] & & \{\mathrm{id}, r^2\} \arrow[ulll] \arrow[u] \arrow[urrr] & & \{\mathrm{id},\ fr\} \arrow[ur] & & \{\mathrm{id},\ fr^3\} \arrow[ul] \\
 & & & & \{\mathrm{id}\} \arrow[ullll] \arrow[ull] \arrow[u] \arrow[urr] \arrow[urrrr] & & & &
\end{tikzcd}
$$

(Este es uno de aquellos casos cuando leer una prueba es mucho menos divertido y útil que encontrarla por cuenta propia...)