Álgebra I. Examen corto 5
Universidad de El Salvador, 21/06/2019

Cada uno de los ejercicios de abajo vale $2\frac{1}{2}$ puntos.

Ejercicio 1.

a) Enumere los elementos del grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$.

b) Encuentre un isomorfismo $D_3 \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$.

Ejercicio 2. Consideremos los grupos

$$\begin{aligned} \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) &:= \{a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid a^t a = a a^t = 1\}, \\ \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) &:= \{a \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det a = 1\}. \end{aligned}$$

a) Demuestre que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ es un subgrupo normal de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

b) Encuentre un isomorfismo entre $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ y el grupo del círculo

$$\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Sugerencia: se puede asumir el cálculo de la hoja de ejercicios 11 que dice que los elementos de $O_2(\mathbb{R})$ son precisamente de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad o \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. Sea G un grupo cíclico.

a) Demuestre que si $H \subset G$ es un subgrupo, entonces el grupo cociente G/H es también cíclico.

b) En particular, para $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, sea $d \mid n$ y H el subgrupo generado por $[d]_n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
¿Cuántos elementos tiene el grupo cociente G/H?

Ejercicio 4.

a) Demuestre que los 3-ciclos generan el grupo alternante A_n para $n \geq 3$.

b) En particular, exprese $(1\ 2\ 3\ 4)\,(5\ 6) \in A_6$ como un producto de 3-ciclos.

c*) A propósito, ¿cuántos 3-ciclos hay en A_n?