Álgebra I. Hoja de ejercicios 1: Conjuntos
Universidad de El Salvador, ciclo impar 2019

Por cualquier pregunta, no duden en escribir al grupo ues-algebra-2019@googlegroups.com.

Ejercicio 1. Sean A_i, $i \in I$ y B conjuntos.

1) Demuestre que
$$\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \cup B = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B) \quad \text{y} \quad \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap B = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B).$$

2) Demuestre que si $A_i \subseteq X$ para todo $i \in I$, entonces
$$X \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} (X \setminus A_i) \quad \text{y} \quad X \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} (X \setminus A_i).$$

Ejercicio 2. Sea X un conjunto. Para dos subconjuntos $A, B \subseteq X$ su **diferencia simétrica** se define por
$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

0) Demuestre que $A \triangle A = \emptyset$ y $A \triangle \emptyset = A$.

1) Demuestre que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

2) Demuestre que $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
   Encuentre una fórmula simétrica en A, B, C para este conjunto.

3) Demuestre que $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$.

Ejercicio 3. Sean $f\colon X \to Y$ una aplicación, $X_i \subseteq X$, $Y_j \subseteq Y$ familias de subconjuntos.

1) Demuestre que
$$f\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(X_i) \quad \text{y} \quad f\Big(\bigcap_{i\in I} X_i\Big) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(X_i).$$

Encuentre un ejemplo cuando $f(X_1 \cap X_2) \subsetneq f(X_1) \cap f(X_2)$.

2) Demuestre que
$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} Y_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(Y_j) \quad \text{y} \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} Y_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j).$$

Ejercicio 4. Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación entre conjuntos. Demuestre las siguientes propiedades.

1a) Para cualquier subconjunto $B \subseteq Y$ se tiene $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.
   Además, si f es sobreyectiva, entonces $f(f^{-1}(B)) = B$.

1b) Para cualquier subconjunto $A \subseteq X$ se tiene $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
   Además, si f es inyectiva, entonces $f^{-1}(f(A)) = A$.

2a) Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$, entonces $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

2b) Si $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y$, entonces $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

Ejercicio 5. Sean X e Y conjuntos finitos.

1) ¿Cuántos elementos tiene $X \times Y$ e $X \sqcup Y$?
2) ¿Cuántos subconjuntos tiene X?
3) ¿Cuántas aplicaciones distintas $X \to Y$ hay?
4) ¿Cuántas biyecciones distintas $X \to X$ hay?

Ejercicio 6. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ un conjunto de tres elementos. Describa todas las biyecciones $X \to X$. Compile la tabla de composición de estas biyecciones:

$$\begin{array}{c|ccc} & \cdots & f & \cdots \\ \hline \vdots & & \vdots & \\ g & \cdots & g \circ f & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Ejercicio 7. Encuentre una biyección entre el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y algún subconjunto propio $X \subsetneq \mathbb{Z}$.

Ejercicio 8. Sean $f\colon X \to Y$ e $g\colon X \to Z$ dos aplicaciones biyectivas. Demuestre que la aplicación

$$\begin{aligned} X &\to Y \times Z, \\ x &\mapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

no es biyectiva si X tiene más de un elemento.

Ejercicio 9. Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación entre conjuntos. Definamos la siguiente relación de equivalencia sobre los elementos de X:

$$x \sim x' \iff f(x) = f(x')$$

Demuestre que f induce una biyección

$$\begin{aligned} X/\sim &\to f(X), \\ [x] &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Ejercicio 10. Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación.

1) Asumamos que $X \neq \emptyset$. Demuestre que f es inyectiva si y solo si existe una aplicación $r\colon Y \to X$ tal que $r \circ f = \mathrm{id}_X$.
2) Demuestre que f es sobreyectiva si y solo si existe una aplicación $s\colon Y \to X$ tal que $f \circ s = \mathrm{id}_Y$*.

*De hecho, este resultado es equivalente al **axioma de elección**.