Álgebra I. Hoja de ejercicios 10: Factorización de polinomios
Universidad de El Salvador, ciclo impar 2019

Por cualquier pregunta, no duden en escribir al grupo ues-algebra-2019@googlegroups.com.

Ejercicio 1. El contenido puede ser definido de otra manera más transparente. Denotemos por A un dominio de factorización única y por K el cuerpo de fracciones de A.

a) Demuestre que para $f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in A[X]$ se tiene $\operatorname{cont}(f) = \operatorname{mcd}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

b) Demuestre que todo polinomio $f \in K[X]$ puede ser escrito como $\frac{1}{d}\, g$, donde $d \in A$ y $g \in A[X]$, y luego $\operatorname{cont}(f) = \frac{\operatorname{cont}(g)}{d}$.

Ejercicio 2. Sean A un dominio de factorización única, y $f, g \in A[X]$. Demuestre que

$$\operatorname{cont}(\operatorname{mcd}(f,g)) = \operatorname{mcd}(\operatorname{cont}(f), \operatorname{cont}(g)).$$

Ejercicio 3. Sean k un cuerpo, $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ un polinomio en n variables y $f = f_1^{m_1} \cdots f_s^{m_s}$ una factorización de f, donde $f_1, \ldots, f_s$ son polinomios irreducibles no asociados entre sí y $m_1, \ldots, m_s \ge 1$. Demuestre que para cualquier otro polinomio $g \in k[X_1, \ldots, X_n]$ las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $f^r \mid g$ para algún $r = 1, 2, 3, \ldots$;

b) $f_1 \cdots f_s \mid g$.

Sugerencia: factorice f^r y g en polinomios irreducibles.

Ejercicio 4 (Teorema de las raíces racionales)**.** Sea $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros. Demuestre que si $\frac{a}{b}$ es una raíz racional de f tal que $\operatorname{mcd}(a, b) = 1$, entonces $a \mid a_0$ y $b \mid a_n$.
Sugerencia: extraiga el factor lineal $(bX - a)$ de f.

Ejercicio 5. Sea c un entero no nulo.

a) Demuestre que el polinomio $X^3 + nX + c$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, salvo un número finito de excepciones.

b) En particular, para $c = 2$ encuentre las factorizaciones del polinomio $f = X^3 + nX + 2$ para todo n.

Sugerencia: use el ejercicio anterior.

Ejercicio 6. Demuestre que el polinomio $f := X^3 + 2X + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$ usando

a) el lema de Gauss y la reducción módulo algún primo p;

b) el teorema de las raíces racionales.

Ejercicio 7. Consideremos el polinomio $f = X^3 + 8X^2 + 6 \in \mathbb{Z}[X]$.

a) Demuestre que f es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$ usando el criterio de Eisenstein.

b) Demuestre que f es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$ usando el teorema de las raíces racionales.

c) Factorice $\overline{f}$ en $\mathbb{F}_p[X]$ para $p = 2, 3, 5, 7$. Con ayuda de PARI/GP encuentre un primo p tal que $\overline{f}$ es irreducible en $\mathbb{F}_p[X]$.

Ejercicio 8. Demuestre que el polinomio $X^n - p$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$ para todo primo $p = 2, 3, 5, 7, \ldots$ y todo $n = 1, 2, 3, \ldots$

Ejercicio 9. Factorice el polinomio $X^n + Y^n$ en polinomios lineales en $\mathbb{C}[X, Y]$.

Ejercicio 10. Para un número primo p, factorice el polinomio ciclotómico Φ_{p^k} en $\mathbb{F}_p[X]$.