Álgebra I. Hoja de ejercicios 12: Generadores y órdenes
Universidad de El Salvador, ciclo impar 2019

Por cualquier pregunta, no duden en escribir al grupo ues-algebra-2019@googlegroups.com.

Ejercicio 1. Sea G un grupo. Supongamos que para dos elementos $g, h \in G$ se cumple $h = k g k^{-1}$ para algún $k \in G$ (en este caso se dice que g y h son **conjugados**). Demuestre que el orden de g es finito si y solamente si el orden de h es finito, y en este caso $\operatorname{ord} g = \operatorname{ord} h$.

Ejercicio 2. Supongamos que G es un grupo finito de orden par. Demuestre que G tiene un elemento de orden 2.

Ejercicio 3. Describa todos los tipos de ciclo posibles en el grupo simétrico S_5 y encuentre los órdenes correspondientes.

Ejercicio 4. Encuentre el orden de cada uno de los elementos del grupo diédrico D_n.

Ejercicio 5. Encuentre los órdenes de las siguientes matrices en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6. Demuestre que el conjunto

$$X = \{1/p^k \mid p \text{ primo}, \ k = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

genera el grupo aditivo $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 7. Demuestre que todo subgrupo finitamente generado de $\mathbb{Q}$ es cíclico.

Ejercicio 8. Encuentre los elementos de orden finito en el grupo de isometrías del plano euclidiano.

Ejercicio 9. Supongamos que G es un grupo no trivial que no tiene subgrupos propios. Demuestre que G es un grupo cíclico finito de orden p, donde p es un número primo.

Ejercicio 10. Sea A un grupo abeliano (escrito en la notación aditiva).

1) Sea $m = 1, 2, 3, \ldots$ un número fijo. Demuestre que los elementos $a \in A$ tales que $m \cdot a = 0$ forman un subgrupo de A. Este se denota por $A[m]$ y se llama el **subgrupo de m-torsión** en A.

2) Demuestre que todos los elementos de orden finito en A forman un subgrupo. Este se llama el **subgrupo de torsión** y se denota por A_{tors}:

$$A_{tors} = \bigcup_{m \ge 1} A[m].$$

3) Encuentre los grupos $A[m]$ y A_{tors} para $A = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^\times, \mathbb{C}^\times$.