Álgebra I. Hoja de ejercicios 4: Polinomios
Universidad de El Salvador, ciclo impar 2019

Por cualquier pregunta, no duden en escribir al grupo ues-algebra-2019@googlegroups.com.

Ejercicio 1. Para una serie de potencias $f = \sum_{i\ge 0} a_i\,X^i \in A[[X]]$ la noción de grado no existe, pero se puede considerar el mínimo índice tal que el coeficiente correspondiente no es nulo:

$$v(f) := \text{mín}\{i \mid a_i \ne 0\}, \quad v(0) := +\infty.$$

Demuestre que para cualesquiera $f, g \in A[[X]]$ se cumplen las desigualdades

$$v(fg) \ge v(f) + v(g), \quad v(f+g) \ge \text{mín}\{v(f), v(g)\},$$

y la igualdad $v(fg) = v(f) + v(g)$ si A es un dominio.

Ejercicio 2.

1) Sea $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinomio real. Demuestre que si $z \in \mathbb{C}$ es una raíz compleja de f, entonces $\overline{z}$ es también una raíz.

2) Deduzca que un polinomio real de grado impar debe tener por lo menos una raíz real.

3) Demuéstrelo usando el análisis real, sin recurrir al teorema fundamental del álgebra.

Ejercicio 3. Demuestre que si $m > 1$ es impar, entonces $\Phi_{2m}(X) = \Phi_m(-X)$.
Sugerencia: compare las expresiones

$$\prod_{d\mid 2m} \Phi_d(X) = X^{2m} - 1 = (X^m - 1)\,(X^m + 1) = -(X^m - 1)\,((-X)^m - 1) = -\prod_{d\mid m} \Phi_d(X)\,\Phi_d(-X)$$

usando la inducción sobre m.

Ejercicio 4. Encuentre los coeficientes de los polinomios ciclotómicos Φ_n para $n = 10, 11, \ldots, 20$.

Ejercicio 5 (Determinante de Vandermonde)**.** Sea k un cuerpo y $x_0, \ldots, x_n \in k$. Demuestre que

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{0\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

Ejercicio 6 (Interpolación polinomial)**.** Sea k un cuerpo. Consideremos n puntos $(x_i, y_i) \in k^2$, donde $i = 0, \ldots, n$ y $x_i \ne x_j$ para $i \ne j$. Usando el ejercicio anterior, demuestre que existe un polinomio único

$$f = a_n\,X^n + a_{n-1}\,X^{n-1} + \cdots + a_1\,X + a_0 \in k[X]$$

de grado $\le n$ tal que $f(x_i) = y_i$ para todo i. (Use el ejercicio anterior.)

Ejercicio 7. Consideremos el polinomio $f = X^n - 1 \in \mathbb{F}_p[X]$. Demuestre que f no tiene raíces múltiples si y solo si $p \nmid n$.

Ejercicio 8. Sea A un anillo conmutativo. Para una serie de potencias $f = \sum_{n\ge 0} a_n\,X^n \in A[[X]]$ definamos su **derivada formal** como la serie

$$f' := \sum_{n\ge 1} n\,a_n\,X^{n-1}.$$

1) Demuestre que para cualesquiera $f, g \in A[[X]]$ se cumple

$$(f+g)' = f' + g', \quad (f\,g)' = f'\,g + f\,g'.$$

2) Calcule las derivadas de las siguientes series formales en $\mathbb{Q}[[X]]$:

$$\exp(X) := \sum_{n\ge 0} \frac{X^n}{n!}, \quad \log(1+X) := \sum_{n\ge 0} (-1)^{n+1} \frac{X^n}{n},$$
$$\operatorname{sen}(X) := \sum_{n\ge 0} (-1)^n \frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(X) := \sum_{n\ge 0} (-1)^n \frac{X^{2n}}{(2n)!}.$$

Ejercicio 9 (Serie de Taylor)**.** Demuestre que si $\mathbb{Q} \subseteq A$, entonces para $f \in A[[X]]$ se cumple

$$f = \sum_{n\ge 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} X^n,$$

donde $f^{(0)} := f$ y $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ para $n \ge 1$.

Ejercicio 10. Si $\mathbb{Q} \subseteq A$, definamos las **integrales formales** por

$$\int_0^X \left(\sum_{n\ge 0} a_n X^n\right) dX := \sum_{n\ge 0} \frac{a_n}{n+1} X^{n+1}.$$

1) Demuestre que se cumple el **teorema fundamental del cálculo**:

$$\int_0^X f'(X)\,dX = f(X) - f(0) \quad \text{y} \quad \left(\int_0^X f(X)\,dX\right)' = f(X),$$

donde $f(0)$ denota el término constante de f.

2) Demuestre que se cumple la **integración por partes**:

$$f(X)\,g(X) - f(0)\,g(0) = \int_0^X f(X)\,g'(X)\,dX + \int_0^X f'(X)\,g(X)\,dX.$$

3) Calcule las series

$$\int_0^X \exp(X)\,dX, \ \int_0^X \log(1+X)\,dX, \ \int_0^X X\exp(X)\,dX.$$