Álgebra I. Hoja de ejercicios 5: Aritmética I
Universidad de El Salvador, ciclo impar 2019

Por cualquier pregunta, no duden en escribir al grupo ues-algebra-2019@googlegroups.com.

Ejercicio 1. Sea p un número primo. Para el anillo $\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ p \nmid b \right\}$ definamos

$$v_p\left(\frac{a}{b}\right) := \text{máx}\{k \mid p^k \mid a\}, \quad v_p(0) := +\infty.$$

1) Demuestre que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Z}_{(p)}$ se cumple

$$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y).$$

2) Demuestre que todo elemento no nulo $x \in \mathbb{Z}_{(p)}$ puede ser escrito como up^n donde $u \in \mathbb{Z}_{(p)}^\times$ y $n = v_p(x)$.

3) Demuestre que todo elemento irreducible en $\mathbb{Z}_{(p)}$ está asociado con p.

Ejercicio 2. Sea k un cuerpo. Consideremos el anillo de las series de potencias $k[[X]]$. Definamos para $f = \sum_{i\ge 0} a_i X^i \in k[[X]]$

$$v(f) := \text{mín}\{i \mid a_i \neq 0\}, \quad v(0) := +\infty$$

(recuerde el primer ejercicio de la hoja 4).

1) Demuestre que toda serie no nula $f \in k[[X]]$ puede ser escrita como $g X^n$ donde $g \in k[[X]]^\times$ y $n = v(f)$.

2) Demuestre que todo elemento irreducible en $k[[X]]$ está asociado con X.

Ejercicio 3. Sea $n \le -3$ un entero negativo libre de cuadrados. Usando la norma, demuestre que los números 2 y $1 \pm \sqrt{n}$ son irreducibles en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$

Ejercicio 4. Sea $n \le -3$ un entero negativo libre de cuadrados. Demuestre que 2 no es primo en $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$. Sugerencia: note que si n es par, entonces $2 \mid (\sqrt{n})^2$, y si n es impar, entonces $2 \mid (1+\sqrt{n})(1-\sqrt{n})$.

Ejercicio 5. Demuestre que en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ no existe un elemento invertible α tal que $1 < \alpha < 2 + \sqrt{3}$. Encuentre los elementos invertibles en $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Ejercicio 6. Sea k un cuerpo. Demuestre que un polinomio f es irreducible en el anillo $k[X]$ si y solo si f no es constante y f no se puede escribir como $f = gh$ con $\deg g, \deg h < \deg f$.

Ejercicio 7. Encuentre los polinomios irreducibles en el anillo $\mathbb{C}[X]$.

Ejercicio 8. Sean k un cuerpo y $f \in k[X]$ un polinomio de grado 2 o 3. Demuestre que f es irreducible si y solo si f no tiene raíces en k.

Ejercicio 9. Encuentre todos los polinomios mónicos irreducibles de grado 2 y 3 en el anillo $\mathbb{F}_p[X]$ para $p = 2, 3$.

Ejercicio 10. Para algún cuerpo k encuentre un polinomio de grado 4 en $k[X]$ que no tiene raíces en k pero es reducible.