Álgebra I. Hoja de ejercicios 8: Homomorfismos y anillos cociente
Universidad de El Salvador, ciclo impar 2019

Por cualquier pregunta, no duden en escribir al grupo ues-algebra-2019@googlegroups.com.

Ejercicio 1. Demuestre que el conjunto

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

es un subanillo del anillo de matrices $M_2(\mathbb{R})$. Encuentre un isomorfismo $A \cong \mathbb{C}$.

Ejercicio 2. Para un anillo no conmutativo A definamos su **centro** como

$$Z(A) := \{x \in A \mid ax = xa \text{ para todo } a \in A\}.$$

1) Demuestre que $Z(A)$ es un subanillo de A.

2) Demuestre que si $\phi\colon A \to B$ es un homomorfismo sobreyectivo, entonces $\phi(Z(A)) \subseteq Z(B)$.

Ejercicio 3. Demuestre que los anillos de polinomios $\mathbb{Z}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ no son isomorfos.
Sugerencia: demuestre que un isomorfismo de anillos $\phi\colon A \xrightarrow{\cong} B$ induce una biyección $A^\times \xrightarrow{\cong} B^\times$.

Ejercicio 4. Escriba la tabla de adición y multiplicación en el anillo cociente $\mathbb{F}_3[X]/(X^2+1)$.

Ejercicio 5. Demuestre que el anillo cociente $\mathbb{Z}[i]/(1+2i)$ es isomorfo al cuerpo de 5 elementos $\mathbb{F}_5$. (Describa los elementos y encuentre un isomorfismo explícito con $\mathbb{F}_5$.)

Ejercicio 6 (Segundo teorema de isomorfía)**.** Sean A un anillo conmutativo, $B \subseteq A$ un subanillo y $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal.

1) Demuestre que $B + \mathfrak{a} := \{x + y \mid x \in B, y \in \mathfrak{a}\}$ es un subanillo de A y que $\mathfrak{a}$ es un ideal en $B + \mathfrak{a}$.

2) Demuestre que la aplicación
$$\phi\colon B \to (B+\mathfrak{a})/\mathfrak{a}, \quad x \mapsto \overline{x}$$
es un homomorfismo sobreyectivo.

3) Demuestre que $\ker\phi = B \cap \mathfrak{a}$.

4) Deduzca que $B/(B\cap\mathfrak{a}) \cong (B+\mathfrak{a})/\mathfrak{a}$.

Ejercicio 7 (Tercer teorema de isomorfía)**.** Sean A un anillo y $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq A$ ideales.

1) Demuestre que la aplicación
$$\phi\colon A/\mathfrak{a} \to A/\mathfrak{b}, \quad x + \mathfrak{a} \mapsto x + \mathfrak{b}$$
está bien definida y es un homomorfismo sobreyectivo.

2) Demuestre que $\ker\phi = \mathfrak{b}/\mathfrak{a} := \{x + \mathfrak{a} \mid x \in \mathfrak{b}\} \subseteq A/\mathfrak{a}$.

3) Demuestre que $(A/\mathfrak{a})/(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}) \cong A/\mathfrak{b}$.

Ejercicio 8. Para $n \ne 1$ un entero libre de cuadrados encuentre un isomorfismo

$$\mathbb{Q}[X]/(X^2-n) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{n}) := \{x + y\sqrt{n} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Ejercicio 9. Encuentre un isomorfismo $\mathbb{Z}[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{Z}[i]$.

Ejercicio 10. Para un número primo p encuentre un isomorfismo $\mathbb{F}_p[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{Z}[i]/(p)$.