Álgebra I. Examen parcial 1 (repetido)
Universidad de El Salvador, 27/04/2019

Ejercicio 1 (2 puntos). Consideremos las series formales

$$\operatorname{sen}(X) := \sum_{n\ge 0} (-1)^n \frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(X) := \sum_{n\ge 0} (-1)^n \frac{X^{2n}}{(2n)!} \in \mathbb{Q}[[X]].$$

En este ejercicio vamos a probar que

$$(*) \qquad \operatorname{sen}(X)^2 + \cos(X)^2 = 1.$$

a) Demuestre que si para una serie formal $f \in \mathbb{Q}[[X]]$ se tiene $f' = 0$, entonces f es una serie constante (de la forma $\sum_{n\ge 0} a_n X^n$, donde $a_n = 0$ para todo $n > 0$).

b) Encuentre el término constante de la serie $\operatorname{sen}(X)^2 + \cos(X)^2$ y usando a) demuestre la identidad (*).

Ejercicio 2 (2 puntos). Determine cuáles de los números

$$3 + 2\sqrt{5}, \quad 4 + 2\sqrt{5}, \quad 2 - \sqrt{5}, \quad 7 + 3\sqrt{5}$$

son irreducibles en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

Ejercicio 3 (2 puntos). Calcule $\operatorname{mcm}(4 + \sqrt{2}, 2 + 3\sqrt{2})$ en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Ejercicio 4 (2 puntos). Demuestre que el polinomio

$$f := X^2 - 2X - 2 \in \mathbb{F}_p[X].$$

es irreducible si y solo si 3 no es un cuadrado módulo p.
Punto extra: demuestre que esto sucede precisamente cuando $p \equiv \pm 5 \pmod{12}$.

Ejercicio 5 (2 puntos). Usando que en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ no existe ningún elemento invertible α tal que

$$1 < \alpha < 2 + \sqrt{5},$$

demuestre que

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}]^\times = \{\pm(2 + \sqrt{5})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$