Álgebra I. Examen parcial 2
Universidad de El Salvador, 07/06/2019

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Sea $\phi\colon A \to B$ un homomorfismo de anillos. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas. Justifique sus respuestas (encuentre una prueba o contraejemplo).

a) Si $a \in A$ es un nilpotente, entonces $\phi(a) \in B$ es también un nilpotente.

b) Si $a \in A$ es un idempotente, entonces $\phi(a) \in B$ es también un idempotente.

c) Si $a \in A$ es un divisor de cero, entonces $\phi(a) \in B$ es también un divisor de cero.

d) Si a es un elemento de orden finito en el grupo $A^\times$, entonces $\phi(a)$ es un elemento de orden finito en el grupo $B^\times$.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Demuestre que el polinomio $Y^n - X^3 + X$ es irreducible en el anillo $k[X,Y]$, donde $n = 1,2,3,\ldots$ y k es cualquier cuerpo.

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Encuentre un isomorfismo de anillos cociente

$$\mathbb{F}_2[X]/(X^3+X^2+1) \cong \mathbb{F}_2[X]/(X^3+X+1).$$

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Demuestre que el grupo simétrico S_{15} contiene un subgrupo cíclico de orden 105.

Ejercicio 5 (2 puntos)**.** Demuestre que el grupo de todas las raíces complejas de la unidad

$$\mu_\infty(\mathbb{C}) := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \text{ para algún } n = 1,2,3,\ldots\}$$

no puede ser generado por un número finito de elementos.