Álgebra I. Taller de PARI/GP
Universidad de El Salvador, 07/05/2019

---

0. Descargue e instale PARI/GP de su página http://pari.math.u-bordeaux.fr/
1. Encuentre todos los cuadrados módulo 13. Exprese cada uno de estos como $[2]_{13}^a$ para algún a.
2. Calcule las sumas $\sum_{1\le i\le p-1}\left(\frac{i}{p}\right)$ para diferentes primos impares p. Explique y demuestre el resultado.
3. Verifique para varios m y n que si m es par, $m \mid n$ y $m < n$, entonces $\phi(m) < \phi(n)$. Trate de probarlo.
4. Calcule los primeros términos la serie inversa a $1 - x - x^2$ en el anillo de las series formales $\mathbb{Z}[[x]]$. ¿Cuál es el patrón? Demuestre la fórmula general.
5. Para diferentes primos p, factorice el polinomio ciclotómico $\Phi_{p^k} \in \mathbb{Z}[x]$ en $\mathbb{F}_p[x]$. ¿Cuál es el patrón? Demuestre la fórmula general. (Véase la hoja de ejercicios 10.)
6. Factorice el octavo polinomio ciclotómico $\Phi_8 = x^4 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ módulo diferentes primos p. ¿Cuál es el primer primo p tal que Φ_8 es el producto de cuatro polinomios lineales en $\mathbb{F}_p[x]$? ¿Cuál sería el siguiente?
7. Verifique para diferentes primos p que el polinomio $x^p - x + 1$ es irreducible en $\mathbb{F}_p[x]$.
8. Factorice el polinomio $x^3 + nx + 2$ en $\mathbb{Z}[x]$ para $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5$. ¿Para cuáles de estos n el polinomio es reducible? Demuestre el resultado general. (Véase la hoja de ejercicios 10.)
9. Compruebe que el polinomio $x^3 + 8x^2 + 6$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$. Factorice este polinomio módulo diferentes primos p. ¿Cuál es el primer primo tal que $x^3 + 8x^2 + 6$ queda irreducible en $\mathbb{F}_p[x]$? (Véase la hoja de ejercicios 10.)
10. Factorice el polinomio $x^9 - x$ en $\mathbb{F}_3[x]$. Encuentre entre los factores un polinomio cuadrático irreducible $f \in \mathbb{F}_3[x]$. Encuentre todos los elementos α en el cuerpo cociente $k := \mathbb{F}_3[x]/(f)$ con la propiedad de que las potencias
$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6, \alpha^7, \alpha^8$$
representan todos los elementos no nulos en k.
11. Con ayuda de PARI/GP, encuentre un isomorfismo $\mathbb{F}_3[x]/(x^2 + x + 2) \cong \mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 1)$.
12. Para diferentes números naturales a y b, calcule $\operatorname{mcd}(x^a - 1, x^b - 1)$ en el cuerpo $\mathbb{Q}[x]$. En general, demuestre la fórmula para
$$\operatorname{mcd}(x^a - 1, x^b - 1) \text{ en } k[x],$$
donde k es cualquier cuerpo.
13. Consideremos el cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 3)$. Para el número $\alpha = 2 + \sqrt{3}$, calcule $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5$.
14. Consideremos el cuerpo $\mathbb{Q}[x]/(\Phi_{23})$. Denotemos por ζ la imagen de x en el cociente. Verifique que el número
$$(1 + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^5 + \zeta^6 + \zeta^{10} + \zeta^{11})\,(1 + \zeta + \zeta^5 + \zeta^6 + \zeta^7 + \zeta^9 + \zeta^{11})$$
tiene forma
$$2 \cdot \sum_{0\le i\le 21} a_i\,\zeta^i, \text{ donde } a_i \in \mathbb{Z}.$$