Álgebra I. Examen de suficiencia
Universidad de El Salvador, 06/07/2019

Cada una de las siguientes preguntas vale $\frac{1}{2}$ punto. Marque las respuestas correctas o escriba el resultado final de sus cálculos. El borrador no se entrega y no se evalúa.

Anillos

Pregunta 1. ¿Cuáles de los siguientes elementos son invertibles en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?

a) $\sqrt{2}$; b) $1-\sqrt{2}$; c) $2+3\sqrt{2}$; d) $3+2\sqrt{2}$.

Pregunta 2. Escriba los polinomios ciclotómicos $\Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, \Phi_6$.

Respuesta:

Pregunta 3. ¿Cuáles de los siguientes números son primos en el anillo $\mathbb{Z}[i]$?

a) 3; b) 5; c) 7; d) 11.

Pregunta 4. ¿Cuántos elementos tiene el anillo cociente $\mathbb{F}_2[X]/(X^4+X^3+1)$?

Respuesta:

Pregunta 5. ¿Cuántos elementos tiene el anillo cociente $\mathbb{Z}[i]/(5)$?

Respuesta:

Pregunta 6. ¿Para cuáles de los siguientes cuerpos k el polinomio $X^3 - X^2 + 1$ es irreducible en $k[X]$?

a) $\mathbb{Q}$; b) $\mathbb{R}$; c) $\mathbb{F}_2$; d) $\mathbb{F}_3$.

Pregunta 7. ¿Cuáles de los siguientes anillos cociente son cuerpos?

a) $\mathbb{Z}[X]/(X^2+1)$; b) $\mathbb{Q}[X]/(X^3+1)$; c) $\mathbb{F}_2[X]/(X^3+X+1)$; d) $\mathbb{F}_2[X]/(X^3+X^2+X+1)$.

Pregunta 8. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

a) Si un polinomio $f \in \mathbb{Z}[X]$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$, entonces es también irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.

b) Para dos polinomios $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ se cumple $\operatorname{cont}(fg) = \operatorname{cont}(f) \cdot \operatorname{cont}(g)$.

c) Los únicos polinomios irreducibles en $\mathbb{C}[X]$ son lineales.

d) Un polinomio irreducible $f \in \mathbb{Z}[X]$ debe ser irreducible módulo cualquier primo p.

Pregunta 9. ¿Cuáles de los siguientes anillos son dominios de ideales principales?

a) $\mathbb{Z}[X]$; b) $\mathbb{Z}[i]$; d) $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$; d) $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

Pregunta 10. ¿Cuáles de las siguientes aplicaciones son homomorfismos de anillos?

a) La traza de una matriz:

$$M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad a \mapsto \operatorname{tr} a.$$

b) El determinante de una matriz:

$$M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad a \mapsto \det a.$$

c) La reducción de una matriz entera módulo 2:

$$M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{F}_2), \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} [a_{11}] & [a_{12}] \\ [a_{21}] & [a_{22}] \end{pmatrix}.$$

d) El cuadrado de un polinomio con coeficientes en $\mathbb{F}_2$:

$$\mathbb{F}_2[X] \to \mathbb{F}_2[X], \quad f \mapsto f^2.$$

Grupos

Pregunta 11. ¿Cuáles de los siguientes grupos tienen centro trivial?

a) D_8; b) A_3; c) A_4; d) Q_8.

Pregunta 12. ¿Cuántos diferentes generadores posee el grupo $\mu_{20}(\mathbb{C}) := \{z \in \mathbb{C} \mid z^{20} = 1\}$?

Respuesta:

Pregunta 13. Enumere los subgrupos del grupo $\mu_{12}(\mathbb{C})$.

Respuesta:

Pregunta 14. Determine el signo de la permutación $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix} \in S_9$.

Respuesta:

Pregunta 15. ¿Cuál es el máximo posible orden de una permutación $\sigma \in S_7$?

Respuesta:

Pregunta 16. Calcule el orden de las matrices $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

Respuesta:

Pregunta 17. ¿Cuáles de los siguientes subgrupos son normales en S_4?

a) $\{\mathrm{id}, (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$,

b) $\{\mathrm{id}, (1\,2\,3\,4), (1\,3)\,(2\,4), (1\,3)\,(2\,4)\}$,

c) $\{\mathrm{id}, (1\,2)\,(3\,4), (1\,3)\,(2\,4), (1\,4)\,(2\,3)\}$,

d) $\{\mathrm{id}, (1\,2\,3), (1\,2\,4), (1\,3\,2), (1\,3\,4), (1\,4\,2), (1\,4\,3), (2\,3\,4), (2\,4\,3), (1\,2)\,(3\,4), (1\,3)\,(2\,4), (1\,4)\,(2\,3)\}$.

Pregunta 18. ¿Cuántas matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con coeficientes en el cuerpo finito $\mathbb{F}_p$ satisfacen $ad - bc = 1$?

Respuesta:

Pregunta 19. ¿Cuáles de los siguientes grupos poseen un número finito de generadores?

a) $\mathbb{Q}$; b) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$; c) $\mathbb{Q}^\times$; d) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Pregunta 20. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas.

a) Si $H, K \subseteq G$ son subgrupos normales, entonces $H \cap K$ es también normal en G.

b) Si $K \subseteq H \subseteq G$ es una cadena de subgrupos y K es normal en H, entonces es normal en G.

c) Si $K \subseteq H \subseteq G$ es una cadena de subgrupos y K es normal en G, entonces es normal en H.

d) Si $\phi\colon G \to H$ es un homomorfismo de grupos y $K \subseteq G$ es un subgrupo normal, entonces $\phi(K)$ es un subgrupo normal de H.