Álgebra computacional. Tarea 5. Fecha límite: 13/06/2019
Universidad de El Salvador, ciclo impar 2019

Se puede usar Macaulay2 para *comprobar* algunos cálculos, pero hay que justificar todas las respuestas.

Serie y polinomio de Hilbert

Ejercicio 1. Para $d \in \mathbb{N}$ consideremos los polinomios

$$\binom{x}{d} := \frac{x\,(x-1)\cdots(x-d+1)}{d!} \in \mathbb{Q}[x].$$

a) Demuestre que

$$\binom{x}{0} = 1,\ \binom{x}{1},\ \binom{x}{2},\ \ldots,\ \binom{x}{d}$$

forman una base del $\mathbb{Q}$-espacio vectorial formado por los polinomios racionales de grado $\le d$.

b) Demuestre que todo polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $f(n) \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ puede ser escrito como

$$f = a_0 \binom{x}{0} + a_1 \binom{x}{1} + \cdots + a_d \binom{x}{d},$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 2. Demuestre que si $I \subseteq J$, entonces $H_I(t) = H_J(t)$ implica que $I = J$.

Ejercicio 3. Demuestre que el número de monomios $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ con $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = d$ es igual a $\binom{n+d-1}{d}$.

Ejercicio 4. Calcule las series de Hilbert de los siguientes ideales monomiales en $k[x, y, z]$:

$$(x^2, y^2, z^2), \quad (xy, xz^3), \quad (xy, xz, yz)$$

de manera directa, contando los monomios.

Ejercicio 5. Encuentre un ideal particular $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ y orden monomial $\preceq$ que no respeta el grado tales que $H_I(t) \ne H_{LT(I)}(t)$.

Ejercicio 6. Demuestre que para un polinomio no nulo $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, el ideal principal correspondiente $I = (f) \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ tiene la serie de Hilbert

$$H_I(t) = \frac{1 - t^{\deg f}}{(1-t)^n}.$$

Ejercicio 7. Se dice que un ideal $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ es **homogéneo** si I está generado por **polinomios homogéneos**

$$f = c_{\alpha(1)}\, x^{\alpha(1)} + \cdots + c_{\alpha(s)}\, x^{\alpha(s)},$$

donde

$$\deg x^{\alpha(1)} = \cdots = \deg x^{\alpha(s)}.$$

Por ejemplo, $(x^3 - xz^2 - y^2 z,\ x + y)$ es un ideal homogéneo.

Demuestre que si $I, J \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ son homogéneos, entonces

$$H_{I+J}(t) = H_I(t) + H_J(t) - H_{I \cap J}(t).$$

Encuentre un contraejemplo para el caso no-homogéneo.

Ejercicio 8. Comprueba sus cálculos del ejercicio 4 usando el algoritmo recursivo.

Ejercicio 9. Calcule los polinomios de Hilbert $p_I(x)$ para los ideales del ejercicio 4. ¿Para cuáles valores de d se cumple $p_I(d) = h_I(d)$?

Ejercicio 10. Calcule la serie de Hilbert del ideal $I := (xy + z, xy^3) \subset k[x, y, z]$ mediante una base de Gröbner y el algoritmo recursivo.

Normalización de Noether

Ejercicio 11. Calcule la subálgebra

$$k[\overline{x}, \overline{y}] \subset k[x, y, z]/(x^2 + y^2 - z^2, x + y + z).$$

Ejercicio 12. Consideremos las k-álgebras

$$A := k[x, y]/(x^2(x+1) - y^2), \quad B := k[x, y, z]/(x - z^2 + 1, y - z^3 + z).$$

Demuestre que se tiene un homomorfismo inyectivo natural $A \hookrightarrow B$, y B es integral sobre A.

Ejercicio 13. Consideremos la k-álgebra $A := k[x_1, x_2]/(x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2 + 1)$. Encuentre

a) una normalización de Noether para $k = \mathbb{F}_2$ (recuerde que esta no puede ser lineal),

b) una normalización de Noether para $k = \mathbb{Q}$ de la forma $a = c_1 x_1 + c_2 x_2$ para $c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$.

Ejercicio 14. Encuentre una normalización de Noether en la forma lineal para la k-álgebra

$$A := k[x_1, x_2, x_3]/(x_1^2 x_2^2, x_1^2 x_3^2).$$