Apéndice C

Álgebra lineal

El propósito de este breve apéndice es juntar algunos resultados básicos de álgebra lineal sobre el polinomio característico. lección 30 30.10.18

Aquí K denotará un cuerpo y V un espacio K-vectorial de dimensión finita n.

C.1 El determinante y traza de un endomorfismo lineal

Escojamos una base $e_1, \ldots, e_n$ de V. Para toda aplicación K-lineal $\phi\colon V \to V$ (es decir, un **endomorfismo** de V) se tiene

$$\phi(e_j) = \sum_{1 \le i \le n} a_{ij}\, e_i$$

para algunos $a_{ij} \in K$. Los elementos a_{ij} forman una matriz de $n \times n$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Bajo esta convención, los vectores de V se representan por las matrices columna:

$$v = c_1\, e_1 + c_2\, e_2 + \cdots + c_n\, e_n \leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

y a $\phi(v)$ corresponde la matriz columna se obtiene multiplicando la matriz de arriba por A por la izquierda:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Las aplicaciones K-lineales $\phi, \psi\colon V \to V$ forman un anillo (no conmutativo) $\operatorname{End}_K(V)$ respecto a la suma punto por punto y la composición habitual como la multiplicación

$$(\phi + \psi)(v) := \phi(v) + \psi(v), \quad (\phi \circ \psi)(v) := \phi(\psi(v)).$$

A cada elemento $a \in K$ corresponde el endomorfismo

$$\mu_a \colon V \to V, \quad v \mapsto a\,v.$$

La aplicación

$$K \to \operatorname{End}(V), \quad a \mapsto \mu_a$$

es un homomorfismo de anillos que define una estructura de K-álgebra sobre $\operatorname{End}_K(V)$ y en particular de un espacio K-vectorial. La correspondencia

$$\begin{gathered} \operatorname{End}_K(V) \to M_n(K), \\ \phi \mapsto A \end{gathered}$$

define un isomorfismo de K-álgebras, y en particular de espacios vectoriales sobre K.

C.1.1. Definición. El **determinante** y la **traza** de un endomorfismo $\phi \colon V \to V$ se definen como es el determinante y la traza de la matriz correspondiente respecto a alguna base:

$$\det \phi := \det A, \quad \operatorname{tr} \phi := \operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Estas definiciones no dependen de una base particular. En efecto, el determinante es multiplicativo:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \quad \text{para cualesquiera } A, B \in M_n(K),$$

mientras que la traza satisface la propiedad

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \quad \text{para cualesquiera } A, B \in M_n(K).$$

Ahora la matriz de ϕ respecto a otra base $e_1', \ldots, e_n'$ es de la forma $B = U\,A\,U^{-1}$, donde $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ es alguna matriz invertible (la matriz de cambio de base), y luego

$$\det(U\,A\,U^{-1}) = \det(U) \cdot \det(A) \cdot \det(U)^{-1} = \det(A), \quad \operatorname{tr}(U\,A\,U^{-1}) = \operatorname{tr}(A\,U^{-1}\,U) = \operatorname{tr}(A).$$

C.1.2. Observación. *Sean $\phi, \psi \colon V \to V$ aplicaciones K-lineales.*

1) *El determinante es multiplicativo:* $\det(\phi \circ \psi) = \det(\phi) \cdot \det(\psi)$.

2) *La traza es K-lineal:* $\operatorname{tr}(a\,\phi + b\,\psi) = a\ \operatorname{tr}(\phi) + b\ \operatorname{tr}(\psi)$ *para cualesquiera $a, b \in K$.*

Demostración. Se sigue de las identidades $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ y $\operatorname{tr}(a\,A + b\,B) = a\ \operatorname{tr}(A) + b\ \operatorname{tr}(B)$ para las matrices. ∎

C.2 El polinomio característico

C.2.1. Definición. Para una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

el **polinomio característico** correspondiente viene dado por

$$p_A := \det(X \cdot I_n - A) := \det \begin{pmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & X - a_{nn} \end{pmatrix} \in K[X].$$

Si V es un espacio vectorial sobre K de dimensión n, entonces para un endomorfismo $\phi\colon V \to V$ el **polinomio característico** se define como

$$p_\phi := p_A,$$

donde A es una matriz que representa a ϕ en alguna base.

Notamos que si $B = U\,A\,U^{-1}$ para alguna matriz invertible U, entonces $p_B = p_A$:

$$p_B = \det(X \cdot I_n - U\,A\,U^{-1}) = \det(U^{-1}\,(X \cdot I_n - U\,A\,U^{-1})\,U) = \det(X \cdot I_n - A) = p_A.$$

Esto significa que el polinomio característico está bien definido para un endomorfismo $\phi\colon V \to V$.

C.2.2. Ejemplo. Para una matriz de 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tenemos

$$p_A = \det \begin{pmatrix} X - a & -b \\ -c & X - d \end{pmatrix} = (X - a)\,(X - d) - bc = X^2 - (a + d)\,X + (ad - bc).$$

▲

C.2.3. Proposición. *Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión finita n. Para un endomorfismo $\phi\colon V \to V$ el polinomio característico p_A es un polinomio mónico de grado n:*

$$p_\phi = X^n + a_{n-1}\,X^{n-1} + \cdots + a_1\,X + a_0 \in K[X].$$

Además,

$$a_{n-1} = -\operatorname{tr}\phi, \quad a_0 = (-1)^n \det\phi.$$

Demostración. Sea A una matriz de $n \times n$ con coeficientes en K que representa a ϕ en alguna base. Por la definición, $p_\phi := p_A$ es el determinante de la matriz

$$B := \begin{pmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & X - a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K[X]).$$

Tenemos entonces

$$p_A = \sum_{\sigma \in S_n} b_{1,\sigma(1)} \cdots b_{n,\sigma(n)}.$$

El único término de la suma que tiene grado n o $n-1$ corresponde a $\sigma = \mathrm{id}$, así que los coeficientes de X^n y X^{n-1} son los mismos que los coeficientes correspondientes en el polinomio

$$(X - a_{11}) \cdots (X - a_{nn}) = X^n - (a_{11} + \cdots + a_{nn})\,X^{n-1} + \cdots.$$

El término constante es

$$p_A(0) = \det(0 \cdot I_n - A) = \det(-A) = \det(-I_n) \cdot \det(A) = (-1)^n \det A.$$

■

Para cualquier polinomio $f = c_m X^m + c_{m-1} X^{m-1} + \cdots + c_1 X + c_0 \in K[X]$ y un endomorfismo ϕ pongamos
$$f(\phi) := c_m \phi^m + c_{m-1} \phi^{m-1} + \cdots + c_1 \phi + c_0 \,\mathrm{id} \in \mathrm{End}_K(V),$$
donde
$$\phi^i := \underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{i}.$$

C.2.4. Proposición (Teorema de Cayley–Hamilton). *Sea $\phi\colon V \to V$ un endomorfismo de un espacio vectorial sobre K de dimensión finita. Entonces, el polinomio característico satisface $p_\phi(\phi) = 0$.*

Demostración. Fijemos una base de V. Sea $A \in M_n(K)$ la matriz que representa a ϕ en esta base. Pongamos $B := X \cdot I_n - A$. Tenemos
$$p_A := \det B = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$
para algunos $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$. Tenemos que probar que
$$p_A(A) = A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = O.$$
La matriz adjunta de B tiene forma
$$\mathrm{adj}\, B = X^{n-1} \cdot B_{n-1} + X^{n-2} \cdot B_{n-2} + \cdots + X \cdot B_1 + B_0$$
para algunas matrices $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1} \in M_n(K)$ (note que cada cofactor de B es un polinomio de grado $\le n-1$). Las entradas de $\mathrm{adj}\, B$ son algunos polinomios de grado $\le n-1$. Tenemos
$$\det B \cdot I_n = B \cdot \mathrm{adj}\, B = (X \cdot I_n - A) \cdot \mathrm{adj}\, B = X \cdot \mathrm{adj}\, B - A \cdot \mathrm{adj}\, B,$$
de donde
$$\begin{aligned} &X^n \cdot I_n + a_{n-1} X^{n-1} \cdot I_n + a_{n-2} X^{n-2} \cdot I_n + \cdots + a_1 X \cdot I_n + a_0 \cdot I_n \\ &\quad = X^n \cdot B_{n-1} + X^{n-1} \cdot B_{n-2} + \cdots + X^2 \cdot B_1 + X \cdot B_0 - (X^{n-1} \cdot AB_{n-1} + \cdots + X \cdot AB_1 + AB_0). \end{aligned}$$
Al igualar los coeficientes de las mismas potencias de X, se obtiene un sistema de ecuaciones
$$\begin{aligned} I_n &= B_{n-1}, \\ a_{n-1} \cdot I_n &= B_{n-2} - AB_{n-1}, \\ a_{n-2} \cdot I_n &= B_{n-3} - AB_{n-2}, \\ &\cdots \\ a_2 \cdot I_n &= B_1 - AB_2, \\ a_1 \cdot I_n &= B_0 - AB_1, \\ a_0 \cdot I_n &= -AB_0. \end{aligned}$$
Multpliquemos la primera ecuación por A^n por la izquierda, la segunda por A^{n-1}, etcétera:
$$\begin{aligned} A^n &= A^n B_{n-1}, \\ a_{n-1} A^{n-1} &= A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1}, \\ a_{n-2} A^{n-2} &= A^{n-2} B_{n-3} - A^{n-1} B_{n-2}, \\ &\cdots \\ a_2 A^2 &= A^2 B_1 - A^3 B_2, \\ a_1 A &= AB_0 - A^2 B_1, \\ a_0 I_n &= -AB_0. \end{aligned}$$

Al sumar todas estas ecuaciones, nos queda

$$p_A(A) = O.$$

■

C.2.5. Comentario. Se conoce la siguiente prueba cómica del teorema de Cayley–Hamilton:

$$p_A(A) = \det(A \cdot I_n - A) = \det(O) = 0.$$

Sin embargo, esto no tiene sentido: $p_A(B)$ es una matriz, mientras que para cualquier matriz B, el determinante $\det(B - A)$ es un elemento de K.

C.2.6. Comentario. El espacio de matrices $M_n(K)$ tiene dimensión n^2 sobre K: como una base se pueden tomar las matrices elementales e_{ij} donde $1 \le i, j \le n$. De manera equivalente, el espacio vectorial $\operatorname{End}_K(V)$ tiene dimensión n^2, donde $n = \dim_K(V)$. De aquí está claro que todo endomorfismo $\phi \in \operatorname{End}_K(V)$ satisface algún polinomio no nulo de grado $\le n^2$: las potencias $\phi^0 = \mathrm{id}, \phi, \phi^2, \ldots, \phi^{n^2}$ son necesariamente linealmente dependientes, así que existen algunos coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_{n^2} \in K$, no todos nulos, tales que

$$c_{n^2}\, \phi^{n^2} + \cdots + c_2\, \phi^2 + c_1\, \phi + c_0 \, \mathrm{id} = 0.$$

El teorema de Cayley–Hamilton es un resultado sorprendende porque este nos dice que tal polinomio no nulo puede tener grado n y lo construye de modo explícito.

C.2.7. Comentario. El determinante, traza y polinomio característico eventualmente están bien definidos para endomorfismos $\phi\colon V \to V$, lo que sugiere que debe haber definiciones y pruebas más elegantes y moralmente correctas que no usan elección de base y matrices. Hemos usado las matrices para ahorrar tiempo y también porque eventualmente nos interesan ejemplos y cálculos explícitos.