Capítulo 0
Conjuntos

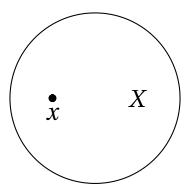
Asumo que el lector conozca algunas bases de la teoría de conjuntos elemental; para los que quieran revisarla, recomiendo el libro [SV2002]. En este capítulo vamos a recordar ciertas propiedades de aplicaciones entre conjuntos y además hablar un poco de las así llamadas "propiedades universales", que al principio podrían verse arcanas, pero van a jugar papel muy importante en nuestro curso. En fin, revisaremos las relaciones de equivalencia que también tendrán mucha importancia.

Primero recordemos las nociones y notación básica.

- La cardinalidad de un conjunto X se denota por $|X|$. Normalmente vamos a usar esta notación para los conjuntos finitos, es decir cuando $|X|$ corresponde al número de elementos. Para un conjunto definido por una expresión entre llaves $\{\cdots\}$ a veces se usa la notación $\#\{\cdots\}$, por ejemplo

$$\#\{0,1,2,3\} = 4.$$

- Si un elemento x pertenece a un conjunto X, se escribe "$x \in X$" o a veces "$X \ni x$".

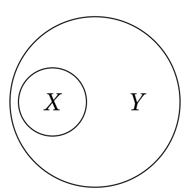


- El **conjunto vacío** se denota por $\emptyset$. Es el conjunto que no tiene ningún elemento:

$$|\emptyset| = 0.$$

- Si un conjunto X está contenido en un conjunto Y, se escribe "$X \subseteq Y$" o "$Y \supseteq X$":

$$x \in X \Longrightarrow x \in Y.$$



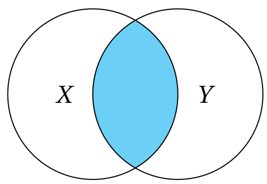
Tenemos $X = Y$ si y solo si $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.

A veces para subrayar que X está contenido en Y, pero $X \neq Y$, se escribe "$X \subsetneq Y$" o "$Y \supsetneq X$". En este caso se dice que X es un **subconjunto propio** de Y.

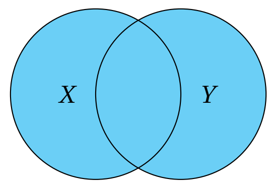
La notación $X \not\subseteq Y$ significa que X *no* está contenido en Y; es decir, que existe $x \in X$ tal que $x \notin Y$. No hay que confundir "$\subsetneq$" con "$\not\subseteq$".

- La **intersección** y **unión** de dos conjuntos X y Y se denotan por "$X \cap Y$" e "$X \cup Y$" respectivamente:

$$X \cap Y := \{z \mid z \in X \text{ y } z \in Y\},$$
$$X \cup Y := \{z \mid z \in X \text{ o } z \in Y\}.$$



$X \cap Y$



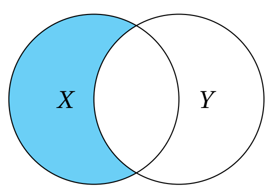
$X \cup Y$

De la misma manera, para una familia de conjuntos X_i indexada por $i \in I$ (donde I es algún conjunto, no necesariamente finito), tenemos

$$\bigcap_{i \in I} X_i := \{z \mid z \in X_i \text{ para todo } i \in I\},$$
$$\bigcup_{i \in I} X_i := \{z \mid z \in X_i \text{ para algún } i \in I\}.$$

- La **diferencia** entre dos conjuntos X e Y se denota por "$X \setminus Y$":

$$X \setminus Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}.$$



$X \setminus Y$

Es importante no confundir "$X \setminus Y$" con "X/Y": la segunda notación también será usada muy a menudo, pero esta denota un **cociente**, noción que vamos a introducir más adelante.

0.1 Aplicaciones entre conjuntos

Para definir una aplicación f entre un conjunto X y un conjunto Y, vamos a escribir muy seguido

$$\begin{aligned} f\colon X &\to Y, \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Note la diferencia entre la flecha "$\to$" y "$\mapsto$".

0.1.1. Definición. Para una aplicación $f\colon X \to Y$ y un subconjunto $Z \subseteq X$, la **restricción** de f a Z es la aplicación $f\big|_Z\colon Z \to Y$ definida por $f\big|_Z(z) := f(z)$ para $z \in Z$.

0.1.2. Definición. Para una aplicación entre conjuntos $f\colon X \to Y$ y subconjuntos $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ la **imagen** de A es el subconjunto de Y dado por

$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$$

y la **preimagen** de B es el subconjunto de X dado por

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Notamos que en el segundo caso, "f^{-1}" es solamente la notación y no se trata de una aplicación f^{-1}.

0.1.3. Observación. *Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación.*

1a) Para cualquier subconjunto $B \subseteq Y$ se tiene $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

1b) Para cualquier subconjunto $A \subseteq X$ se tiene $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

2a) Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$, entonces $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

2b) Si $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y$, entonces $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$. □

0.1.4. Definición. Para dos aplicaciones $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ la composición $g \circ f\colon X \to Y$ es la aplicación definida por

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Esta información puede representarse mediante un "diagrama conmutativo":

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Aclaramos que, para nosotros, la notación "$g \circ f$" significa que *primero* se aplica f y *luego* g. Por esto las expresiones como "$g \circ f$" a veces se escriben y se leen de derecha a izquierda. Si $f, g\colon X \to X$ son aplicaciones entre X y sí mismo, entonces ambas composiciones $g \circ f$ y $f \circ g$ tienen sentido, pero normalmente el resultado es diferente.

0.1.5. Ejemplo. Consideremos las aplicaciones $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f\colon x \mapsto x+1 \quad \text{y} \quad g\colon x \mapsto x^2.$$

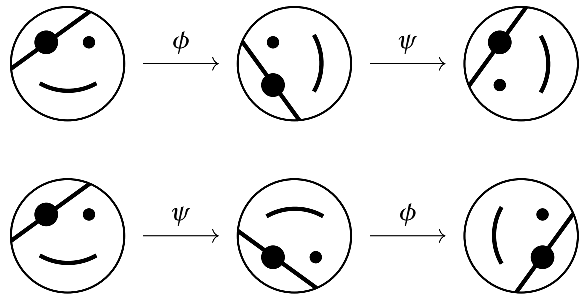
Luego,

$$g(f(x)) = x^2 + 2x + 1, \text{ mientras que } f(g(x)) = x^2 + 1.$$ ▲

0.1.6. Ejemplo. Sea $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación del plano de $90°$ en el sentido antihorario y sea $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la reflexión respecto al eje x. Estas son aplicaciones lineales que corresponden a las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se ve géometricamente que $\psi \circ \phi \neq \phi \circ \psi$.



También podemos multiplicar las matrices:

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ mientras que } AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ ▲

0.1.7. Observación. *La composición es* ***asociativa****: para $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$, $h\colon Z\to W$ tenemos*

$$(h\circ g)\circ f = h\circ (g\circ f).$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rrr, bend left, "h\circ g\circ f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h\circ g"'] & Z \arrow[r, "h"] & W
\end{tikzcd}$$

Demostración. Para cualquier $x\in X$, ambas aplicaciones tienen el valor $h(g(f(x)))$. ■

0.1.8. Corolario (Asociatividad generalizada). *Para n aplicaciones*

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \to X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1}$$

Toda manera de poner los paréntesis en la expresión

$$f_n\circ f_{n-1}\circ\cdots\circ f_2\circ f_1$$

(es decir, de calcular la composición) da el mismo resultado.

0.1.9. Ejemplo. Para $n=3$, tenemos dos posibilidades:

$$(f_3\circ f_2)\circ f_1,\quad f_3\circ(f_2\circ f_1).$$

El resultado es el mismo según 0.1.7. Para $n=4$ hay 5 posibilidades:

$$((f_4\circ f_3)\circ f_2)\circ f_1,\quad (f_4\circ(f_3\circ f_2))\circ f_1,\quad (f_4\circ f_3)\circ(f_2\circ f_1),$$
$$f_4\circ((f_3\circ f_2)\circ f_1),\quad f_4\circ(f_3\circ(f_2\circ f_1)).$$ ▲

0.1.10. Comentario (♣). En general, hay

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

posibilidades de poner los paréntesis en la expresión $f_1\circ\cdots\circ f_n$. Los números C_n se conocen como los **números de Catalan**[*].

[*] Eugène Charles Catalan (1814–1894), un matemático francés-belga.

n:	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_n:	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786

Demostración de 0.1.8. Para $n = 2$ no hay que demostrar nada y el caso de $n = 3$ es el contenido de 0.1.7. Para $n > 3$, supongamos que la propiedad se cumple para toda composición de $< n$ aplicaciones. En una expresión $f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$, después de poner los paréntesis de algún modo, tenemos

$$(f_n \circ \cdots \circ f_{r+1}) \circ (f_r \circ \cdots \circ f_1),$$

donde las expresiones en los paréntesis están bien definidas por la hipótesis de inducción. Sea

$$(f_n \circ \cdots \circ f_{s+1}) \circ (f_s \circ \cdots \circ f_1)$$

otro modo de poner los paréntesis. Sin pérdida de generalidad, $r < s$. Tenemos

$$f_n \circ \cdots \circ f_{r+1} = (f_n \circ \cdots \circ f_{s+1}) \circ (f_s \circ \cdots \circ f_{r+1})$$

y

$$f_s \circ \cdots \circ f_1 = (f_s \circ \cdots \circ f_{r+1}) \circ (f_r \circ \cdots \circ f_1).$$

Ahora

$$(f_n \circ \cdots \circ f_{r+1}) \circ (f_r \circ \cdots \circ f_1) = \big((f_n \circ \cdots \circ f_{s+1}) \circ (f_s \circ \cdots \circ f_{r+1})\big) \circ (f_r \circ \cdots \circ f_1)$$

y

$$(f_n \circ \cdots \circ f_{s+1}) \circ (f_s \circ \cdots \circ f_1) = (f_n \circ \cdots \circ f_{s+1}) \circ \big((f_s \circ \cdots \circ f_{r+1}) \circ (f_r \circ \cdots \circ f_1)\big).$$

Por inducción, las últimas dos expresiones coinciden. ■

Para cualquier conjunto X, existe una aplicación distinguida $X \to X$, a saber la que aplica todo elemento en sí mismo.

0.1.11. Definición. La **aplicación identidad** $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ se define como

$$\mathrm{id}_X(x) := x.$$

0.1.12. Observación. *Para cualesquiera aplicaciones $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ se cumple que*

$$f \circ \mathrm{id}_X = f, \quad \mathrm{id}_X \circ g = g. \tag{0.1}$$

Note que (0.1) define a id_X de modo único: si tenemos dos aplicaciones $i'_X, i''_X\colon X \to X$ tales que para cualesquiera $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ se cumple

$$f \circ i'_X = f, \quad i''_X \circ g = g,$$

en particular para $X = Y$ tenemos

$$i''_X = i''_X \circ i'_X = i'_X.$$

0.1.13. Definición. Se dice que una aplicación $f\colon X \to Y$ es **invertible** si existe otra aplicación $f^{-1}\colon Y \to X$ tal que

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y. \tag{0.2}$$

La notación "f^{-1}" (no confundirla con la notación de 0.1.2) está justificada por el hecho de que la aplicación inversa está definida de modo único.

0.1.14. Observación. *Si $f', f''\colon Y \to X$ son dos aplicaciones que satisfacen*

$$f' \circ f = \mathrm{id}_X, \quad f \circ f' = \mathrm{id}_Y, \quad f'' \circ f = \mathrm{id}_X, \quad f \circ f'' = \mathrm{id}_Y,$$

entonces $f' = f''$.

Demostración. Tenemos

$$f' = f' \circ \mathrm{id}_Y = f' \circ (f \circ f'') = (f' \circ f) \circ f'' = \mathrm{id}_X \circ f'' = f''. \qquad \blacksquare$$

0.1.15. Observación. *Si $f\colon X \to Y$ es una aplicación invertible, entonces $f^{-1}\colon Y \to X$ es también invertible: su inversa es $f\colon X \to Y$:*

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Demostración. Las fórmulas 0.2 son simétricas y dicen al mismo tiempo que f es inversa a f^{-1}. ■

0.1.16. Observación. *Si $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ poseen aplicaciones inversas $f^{-1}\colon Y \to X$ y $g^{-1}\colon Z \to Y$, entonces la composición $f^{-1} \circ g^{-1}\colon Z \to X$ es la inversa de $g \circ f\colon X \to Z$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] & Y \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \arrow[r, shift left, "g"] & Z \arrow[l, shift left, "g^{-1}"] \end{tikzcd}$$

En general, toda composición de n aplicaciones invertibles $f_n \circ \cdots \circ f_1$ es también invertible y su aplicación inversa es dada por

$$(f_n \circ \cdots \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ \cdots \circ f_n^{-1}.$$

Demostración. Tenemos

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{id}_Y \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_Z,$$

y de la misma manera,

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{id}_Y \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X.$$

En general, $(f_n \circ \cdots \circ f_1)^{-1}$ se calcula por inducción sobre n. Acabamos de ver el caso de $n = 2$. Para el paso inductivo, escribamos

$$(f_n \circ \cdots \circ f_1)^{-1} = (f_n \circ (f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1))^{-1} = (f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1)^{-1} \circ f_n^{-1}. \qquad \blacksquare$$

Note que en la fórmula “$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$” se cambia el orden de f y g. Es algo natural: la composición $g^{-1} \circ f^{-1}$ no tiene sentido. Piense en el siguiente ejemplo de la vida real: para salir, primero ponemos una camisa y luego un abrigo. Después, primero se quita el abrigo y luego la camisa y no al revés.

0.2 Aplicaciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

0.2.1. Definición. Una aplicación entre conjuntos $f\colon X \to Y$ es

1) **inyectiva** si f aplica diferentes elementos de X en diferentes elementos de Y; es decir,

$$f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x';$$

2) **sobreyectiva** si para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$;

3) **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.

0.2.2. Observación. *Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación.*

1) Si f es sobreyectiva, entonces para cualquier subconjunto $B \subseteq Y$ se tiene $f(f^{-1}(B)) = B$.

2) Si f es inyectiva, entonces para cualquier subconjunto $A \subseteq X$ se tiene $f^{-1}(f(A)) = A$. □

Podemos caracterizar las propiedades de arriba en términos de composiciones de aplicaciones.

0.2.3. Observación. *Sean $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ dos aplicaciones. Si f y g son inyectivas (resp. sobreyectivas, biyectivas), entonces $g \circ f$ es también inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva).* □

0.2.4. Proposición. *Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación entre conjuntos.*

1) f es inyectiva si y solamente si es cancelable por la izquierda: para todo par de aplicaciones $g, g'\colon Z \to X$ tenemos

$$f \circ g = f \circ g' \Longrightarrow g = g'. \tag{0.3}$$

2) f es sobreyectiva si y solamente si es cancelable por la derecha: para todo par de aplicaciones $g, g'\colon Y \to Z$ tenemos

$$g \circ f = g' \circ f \Longrightarrow g = g'. \tag{0.4}$$

3) f es biyectiva si y solamente si f es invertible.

Demostración. El lector puede verificar fácilmente que si f es inyectiva, entonces f cumple la propiedad de cancelación (0.3) y si f es sobreyectiva, entonces f cumple la propiedad de cancelación (0.4). Veamos las implicaciones menos evidentes.

1) Asumamos que f cumple la propiedad (0.3). Para cualesquiera $x, x' \in X$ podemos considerar las aplicaciones $g, g'\colon \{\bullet\} \to X$ definidas por

$$g\colon \bullet \mapsto x, \quad g'\colon \bullet \mapsto x'.$$

La condición (0.3) quiere decir precisamente

$$f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x',$$

es decir, que f es inyectiva.

2) Ahora consideremos dos aplicaciones $g, g'\colon Y \to \{0,1\}$ definidas por

$$g(y) := 1 \quad \text{para todo } y \in Y$$

y

$$g'(y) := \begin{cases} 1, & \text{si } y = f(x) \text{ para algún } x \in X, \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Tenemos $g \circ f = g' \circ f$ y la identidad $g = g'$ quiere decir precisamente que f es sobreyectiva.

3) Supongamos que f es una biyección. Esto quiere decir que para todo $y \in Y$ existe único elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Podemos definir entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon Y &\to X, \\ y &\mapsto x \text{ tal que } f(x) = y, \end{aligned}$$

y esta aplicación satisface (0.2).

Viceversa, si posee la aplicación inversa f^{-1}, entonces f es cancelable por la izquierda y por la derecha: para cualesquiera $g, g'\colon Z \to X$ tenemos

$$\begin{aligned} f \circ g = f \circ g' \Longrightarrow f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ (f \circ g') \Longrightarrow (f^{-1} \circ f) \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ g' \\ \Longrightarrow \mathrm{id}_X \circ g = \mathrm{id}_X \circ g' \Longrightarrow g = g', \end{aligned}$$

y de la misma manera, para cualesquiera $g, g' \colon Y \to Z$ tenemos

$$g \circ f = g' \circ f \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow g = g'.$$

Por lo tanto f es inyectiva y sobreyectiva gracias a 1) y 2). ■

0.2.5. Comentario (♣). Usando 0.2.4, podemos dar otra demostración de 0.2.3. A saber, sean $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to Z$ dos aplicaciones.

1) Si f y g son cancelables por la izquierda, entonces la composición $g \circ f$ es también cancelable por la izquierda: para cualesquiera $h, h' \colon W \to X$ tenemos

$$(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ h' \Longrightarrow g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ h') \Longrightarrow f \circ h = f \circ h' \Longrightarrow h = h'.$$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "h'"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

2) De la misma manera, si f y g son cancelables por la derecha, entonces la composición $g \circ f$ es también cancelable por la derecha: para cualesquiera $h, h' \colon Z \to W$ tenemos

$$h \circ (g \circ f) = h' \circ (g \circ f) \Longrightarrow (h \circ g) \circ f = (h' \circ g) \circ f \Longrightarrow h \circ g = h' \circ g \Longrightarrow h = h'.$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "h'"'] & W \end{tikzcd}$$

3) Ya hemos observado en 0.1.16 que la composición de aplicaciones invertibles es también invertible.

0.2.6. Observación. *Sean $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to Z$ dos aplicaciones. Consideremos su composición $g \circ f$.*

1) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es también inyectiva.

2) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es también sobreyectiva.

Demostración. Esto es inmediato de comprobar en el lenguaje de conjuntos, pero demostrémoslo en términos de aplicaciones cancelables. La aplicación $g \circ f$ es inyectiva precisamente si es cancelable por la izquierda: para todo h, h' tenemos

$$(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ h' \Longrightarrow h = h'.$$

Pero esto implica en particular que f es cancelable por la izquierda:

$$f \circ h = f \circ h' \Longrightarrow g \circ f \circ h = g \circ f \circ h' \Longrightarrow h = h'.$$

De la misma manera, si $g \circ f$ es sobreyectiva precisamente si es cancelable por la derecha:

$$h \circ (g \circ f) = h' \circ (g \circ f) \Longrightarrow h = h'.$$

Pero en este caso g tiene que ser cancelable por la derecha:

$$h \circ g = h' \circ g \Longrightarrow h \circ g \circ f = h' \circ g \circ f \Longrightarrow h = h'.$$ ■

0.3 Caracterización de $\emptyset$ y $\{\bullet\}$

Las siguientes propiedades son obvias, pero a la vez muy importantes.

0.3.1. Observación (Propiedad universal del conjunto vacío). *Para todo conjunto X existe una aplicación única $\emptyset \to X$.*

$$\emptyset \overset{\exists!}{\dashrightarrow} X$$ □

0.3.2. Observación (Propiedad universal de un conjunto de un elemento). *Si $\{\bullet\}$ es un conjunto de un elemento, entonces para cualquier conjunto X existe una aplicación única $X \to \{\bullet\}$:*

$$X \overset{\exists!}{\dashrightarrow} \{\bullet\}$$ □

0.4 Diagramas conmutativos

En nuestro curso vamos a usar muy a menudo **diagramas conmutativos**. Son dibujos con algunos objetos X, Y, Z (que van a corresponder a ciertos conjuntos) y flechas entre ellos como $X \to Y$ (que van a corresponder a ciertas aplicaciones), tales que las composiciones de flechas a lo largo de diferentes caminos coinciden. Esto suena demasiado general y confuso para ser útil, así que veamos algunos ejemplos particulares.

1) Un triángulo

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[rr, "h"'] & & Z \end{tikzcd}$$

es conmutativo si

$$h \circ f = g.$$

2) Un cuadrado

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ Z \arrow[r, "k"'] & W \end{tikzcd}$$

es conmutativo si

$$g \circ f = k \circ h.$$

0.4.1. Ejemplo. Consideremos el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^2$. Sea $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal de rotación de 90°, definida por la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y sea $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces, el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ V \arrow[r, "\phi"] & V \end{tikzcd}$$

—en efecto, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ corresponde a la rotación de 45° combinada con la homotecia de razón $\sqrt{2}$. Todas las rotaciones conmutan entre sí, y las homotecias conmutan con cualquier otra aplicación lineal. ▲

0.4.2. Ejemplo (♣). He aquí otro ejemplo más interesante de álgebra lineal. Si U es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, entonces el **espacio dual** correspondiente viene dado por

$$U^\vee := \{\text{aplicaciones lineales } \lambda\colon U \to \mathbb{R}\}.$$

Una aplicación lineal $f\colon U \to V$ induce una aplicación lineal entre los espacios duales

$$\begin{aligned} f^\vee\colon V^\vee &\to U^\vee, \\ (V \xrightarrow{\lambda} \mathbb{R}) &\mapsto (U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\lambda} \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Tomando otra vez más los espacios duales, se obtiene una aplicación lineal

$$f^{\vee\vee}\colon U^{\vee\vee} \to V^{\vee\vee}$$

(dejo al lector encontrar su definición explícita). Ahora para cualquier espacio vectorial U existe una aplicación lineal*

$$\eta_U\colon U \to U^{\vee\vee}$$

que a un vector $u \in U$ asocia la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_u\colon U^\vee &\to \mathbb{R}, \\ \lambda &\mapsto \lambda(u). \end{aligned}$$

Ahora, el cuadrado

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_U"'] & V \arrow[d, "\eta_V"] \\ U^{\vee\vee} \arrow[r, "f^{\vee\vee}"] & V^{\vee\vee} \end{tikzcd}$$

es conmutativo (este es un buen ejercicio de álgebra lineal). ▲

3) Para el diagrama

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & W \arrow[l, "p"] \arrow[r, "q"'] & Y \end{tikzcd}$$

la conmutatividad significa que

$$p \circ \phi = f \quad \text{y} \quad q \circ \phi = g.$$

Cuando en un diagrama aparece una flecha punteada

$$\overset{\exists!}{\dashrightarrow}$$

esto se entiende como “existe una flecha única que hace conmutar el diagrama”.

*Es un isomorfismo si U tiene dimensión finita.

0.4.3. Ejemplo. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y las dos proyecciones $p_1, p_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$p_1(x,y) := x, \quad p_2(x,y) := y.$$

Existe una aplicación lineal única $\Delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\ \Delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\ \mathbb{R} & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

—a saber, se ve que hay que poner $\Delta(x) = (x,x)$. ▲

0.5 Caracterización de productos y coproductos

Recordemos que para una familia de conjuntos X_i indexada por $i \in I$ su **producto cartesiano** consiste en las sucesiones de elementos $x_i \in X_i$:

$$\prod_{i\in I} X_i := \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in X_i\} \tag{0.5}$$

y está dotado de las proyecciones

$$\begin{aligned} p_i\colon \prod_{i\in I} X_i &\to X_i,\\ (x_i)_{i\in I} &\mapsto x_i. \end{aligned}$$

A partir de ahora, en lugar de "producto cartesiano", vamos a decir simplemente "producto". Por otro lado, la **unión disjunta** puede ser definida como

$$\coprod_{i\in I} X_i := \bigcup_{i\in I} (X_i \times \{i\}) \tag{0.6}$$

y está dotada de las inclusiones

$$\begin{aligned} \iota_i\colon X_i &\to \coprod_{i\in I} X_i,\\ x_i &\mapsto (x_i, i). \end{aligned}$$

Para el producto y coproducto de dos conjuntos (en el caso cuando I consiste en dos elementos) se usa la notación $X \times Y$ e $X \sqcup Y$ respectivamente.

En cierto sentido, nuestras construcciones del producto y la unión disjunta no son canónicas. Por ejemplo, para definir $X \times Y$ como conjunto, hay varias formas de modelar los pares ordenados (x,y). De hecho, el concepto de "par ordenado" no hace parte de los axiomas de conjuntos[*], pero podemos modelar los pares ordenados, poniendo, por ejemplo

$$(x,y) := \{\{x\},\{x,y\}\}.$$

[*]Los números naturales tampoco son conceptos básicos y se construyen, por ejemplo, como

$$\begin{aligned} &0 := \emptyset,\\ &1 := \{0\} = \{\emptyset\},\\ &2 := \{0,1\} = \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\\ &3 := \{0,1,2\} = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\},\\ &\ \ \cdots \end{aligned}$$

Sin embargo, todo el mundo sabe bien qué es un número natural, sin ayuda de los lógicos.

Sin embargo, el punto es que la definición particular es irrelevante; la única propiedad importante es que

$$(x,y) = (x',y') \quad \text{si y solo si} \quad x = x' \text{ e } y = y'.$$

(Como un ejercicio, demuéstrelo para la definición de arriba.)

De la misma manera, como la unión disjunta $X \sqcup Y$ se puede tomar el conjunto

$$(X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$$

pero este no es mejor que el conjunto

$$(\{☺\} \times X) \cup (\{☹\} \times Y).$$

En el fondo, el aspecto más importante lo constituyen las *propiedades universales* que satisfacen el producto y la unión disjunta.

0.5.1. Observación (Propiedad universal del producto). *Sea Z un conjunto junto con aplicaciones $f_i\colon Z \to X_i$. Entonces, existe una aplicación única $\phi\colon Z \to \prod_{i\in I} X_i$ tal que $p_i \circ \phi = f_i$ para todo $i \in I$.*

(0.7)
$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, dashed, "\exists!"', "\phi"] \arrow[dr, "f_i"] & \\
\prod_{i\in I} X_i \arrow[r, "p_i"'] & X_i
\end{tikzcd}$$

Demostración. Se ve que la única opción posible es poner

$$\phi(z) := (f_i(z))_{i\in I}. \qquad \blacksquare$$

Usando la propiedad universal, podemos definir varias aplicaciones $Z \to \prod_i X_i$ de manera canónica. Veamos un par de ejemplos.

0.5.2. Ejemplo. Consideremos el producto $X \times X$ y dos aplicaciones identidad $\mathrm{id}_X\colon X \to X$:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, dashed, "\exists!"', "\Delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\
X & X \times X \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & X
\end{tikzcd}$$

la aplicación $\Delta\colon X \to X \times X$ caracterizada de modo único por

$$p_1 \circ \Delta = p_2 \circ \Delta = \mathrm{id}_X$$

se llama la **aplicación diagonal**. En términos de los elementos del producto cartesiano $X \times X$ como lo hemos definido arriba, tenemos

$$\Delta\colon x \mapsto (x,x). \qquad \blacktriangle$$

0.5.3. Ejemplo. Para dos aplicaciones $f\colon X \to X'$ y $g\colon Y \to Y'$, tenemos una aplicación

$$f \times g\colon X \times Y \to X' \times Y'$$

caracterizada de modo único por

$$p_1' \circ (f \times g) = f \circ p_1, \quad p_2' \circ (f \times g) = g \circ p_2.$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & X \times Y \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, dashed, "\exists!"', "f\times g"] & Y \arrow[d, "g"] \\
X' & X' \times Y' \arrow[l, "p_1'"'] \arrow[r, "p_2'"] & Y'
\end{tikzcd}$$

En términos de elementos,

$$f \times g\colon (x,y) \mapsto (f(x), g(y)). \qquad \blacktriangle$$

0.5.4. Observación (Propiedad universal del coproducto). *Sea Z un conjunto junto con aplicaciones $f_i\colon X_i \to Z$. Entonces, existe una aplicación única $\phi\colon \coprod_{i\in I} X_i \to Z$ tal que $\phi\circ\iota_i = f_i$ para todo $i\in I$.*

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} X_i \arrow[d, dashed, "\exists!\,\phi"'] & X_i \arrow[l, "\iota_i"'] \arrow[dl, "f_i"] \\
Z &
\end{tikzcd} \tag{0.8}$$

Demostración. La aplicación tiene que ser dada por

$$\phi(x_i, i) = f_i(x_i).$$ ■

Volviendo a la definición alternativa de la unión disjunta

$$(\{\smiley\}\times X)\cup(\{\frownie\}\times Y),$$

podemos notar que esta construcción también viene con las aplicaciones de inclusión $i\colon x\mapsto(\smiley, x)$ y $j\colon y\mapsto(\frownie, y)$ que satisfacen la misma propiedad universal:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & (\{\smiley\}\times X)\cup(\{\frownie\}\times Y) \arrow[d, dashed, "\exists!\,\phi"'] & Y \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, "g"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

En este sentido, la construcción $(\{\smiley\}\times X)\cup(\{\frownie\}\times Y)$ es tan buena como $(X\times\{0\})\cup(Y\times\{1\})$.

0.5.5. Comentario. Note que el diagrama (0.8) es casi idéntico a (0.7), solo que todas las flechas van al revés. En este sentido, el producto y la unión disjunta de conjuntos son construcciones *duales*. Por esto a veces se dice que la unión disjunta es el **coproducto** de conjuntos.

0.6 Propiedades universales (♣)

Hemos dicho que 0.3.1, 0.3.2, 0.5.1 y 0.5.4 son **propiedades universales**, porque estas *definen* $\emptyset$, $\{\bullet\}$, $\prod_{i\in I} X_i$, $\coprod_{i\in I} X_i$ de modo único salvo biyección única.

0.6.1. Ejemplo. Supongamos que hay un conjunto T tal que

para todo X existe una aplicación única $X\to T$.

Sea T' otro conjunto que satisface la misma propiedad:

para todo X existe una aplicación única $X\to T'$.

Entonces, deben existir aplicaciones *únicas*

$$T\xrightarrow{\exists! f} T' \quad \text{y} \quad T'\xrightarrow{\exists! g} T.$$

Podemos considerar sus composiciones

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & T' \arrow[r, "g"] & T
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
T' \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & T \arrow[r, "f"] & T'
\end{tikzcd}$$

Pero según las propiedades que hemos supuesto, hay una sola aplicación $T \to T$, y esta debe ser la aplicación identidad id_T. De la misma manera, la única aplicación $T' \to T'$ es $\mathrm{id}_{T'}$. Entonces,

$$g \circ f = \mathrm{id}_T, \quad f \circ g = \mathrm{id}_{T'},$$

y las aplicaciones f y g nos dan una biyección entre T y T'. Por esto cuando escribimos $\{\bullet\}$, no nos interesa qué es exactamente $\bullet$; lo único que importa es que el conjunto $\{\bullet\}$ satisfaga 0.3.2, y esta propiedad define $\{\bullet\}$ salvo biyección única (lo que no nos sorprende, ya que se trata de conjuntos de un elemento). ▲

0.6.2. Ejemplo. Para ver otro ejemplo más interesante de este tipo de razonamiento, consideremos el caso del producto $X \times Y$. Supongamos que hay dos conjuntos W' y W'' junto con algunas aplicaciones

$$X \xleftarrow{p_1'} W' \xrightarrow{p_2'} Y \qquad\qquad X \xleftarrow{p_1''} W'' \xrightarrow{p_2''} Y$$

y cada uno satisface la propiedad universal (0.7):

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[ld, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\,\binom{f}{g}"] \arrow[rd, "g"] & \\ X & W' \arrow[l, "p_1'"'] \arrow[r, "p_2'"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z \arrow[ld, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\,\binom{f}{g}"] \arrow[rd, "g"] & \\ X & W'' \arrow[l, "p_1''"'] \arrow[r, "p_2''"] & Y \end{tikzcd}$$

Aplicando estas dos propiedades una a otra, se obtiene

$$\begin{tikzcd} & W'' \arrow[ld, "p_1''"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\,\phi"] \arrow[rd, "p_2''"] & \\ X & W' \arrow[l, "p_1'"'] \arrow[r, "p_2'"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & W' \arrow[ld, "p_1'"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\,\psi"] \arrow[rd, "p_2'"] & \\ X & W'' \arrow[l, "p_1''"'] \arrow[r, "p_2''"] & Y \end{tikzcd}$$

es decir, existen aplicaciones *únicas*

$$\phi\colon W'' \to W' \quad \text{y} \quad \psi\colon W' \to W''$$

que satisfacen

$$p_1' \circ \phi = p_1'', \quad p_2' \circ \phi = p_2'', \quad p_1'' \circ \psi = p_1', \quad p_2'' \circ \psi = p_2'.$$

Podemos considerar sus composiciones

$$\phi \circ \psi\colon W' \to W', \quad \psi \circ \phi\colon W'' \to W''.$$

Se ve que estas hacen conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd} & W' \arrow[ld, "p_1'"'] \arrow[d, dashed, "\phi\circ\psi"] \arrow[rd, "p_2'"] & \\ X & W' \arrow[l, "p_1'"'] \arrow[r, "p_2'"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & W'' \arrow[ld, "p_1''"'] \arrow[d, dashed, "\psi\circ\phi"] \arrow[rd, "p_2''"] & \\ X & W'' \arrow[l, "p_1''"'] \arrow[r, "p_2''"] & Y \end{tikzcd}$$

Pero las flechas verticales punteadas en los diagramas de arriba también deben ser únicas y por lo tanto coinciden con las aplicaciones identidad:

$$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{W'}, \quad \psi \circ \phi = \mathrm{id}_{W''}.$$

Entonces, ϕ y ψ definen una biyección $W' \cong W''$. Esto significa que no es importante cómo se define $X \times Y$; si hay otro conjunto W que satisface la misma propiedad universal 0.5.1, entre W y $X \times Y$ habrá una biyección *canónica*. ▲

Las consideraciones de arriba pueden parecer banales, o más bien una sobrecomplicación innecesaria de algo banal (¿quién no sabe que es el producto cartesiano de dos conjuntos?), pero estas ideas son fundamentales para las matemáticas modernas. Entre el final del siglo XIX y los inicios del siglo XX, una gran revolución sucedió cuando se descubrió que todos los objetos de interés pueden ser modelados en términos de conjuntos. A partir de los años 50 el punto de visto ha cambiado: los objetos suelen definirse en términos de sus propiedades universales y diagramas conmutativos, y los detalles de su codificación en términos de conjuntos son irrelevantes.

0.7 Relaciones de equivalencia

Para terminar este capítulo, revisemos brevemente la noción de relación de equivalencia que será de mucha importancia en nuestro curso.

0.7.1. Definición. Sea X un conjunto. Una relación binaria $\sim$ sobre X es una **relación de equivalencia** si se cumplen los siguientes axiomas:

E1) **reflexividad**: para todo $x \in X$ se cumple $x \sim x$;

E2) **simetría**: para cualesquiera $x, y \in X$, si $x \sim y$, entonces $y \sim x$;

E3) **transitividad**: para cualesquiera $x, y, z \in X$, si $x \sim y$ e $y \sim z$, entonces $x \sim z$.

0.7.2. Definición. Sea X un conjunto dotado de una relación de equivalencia $\sim$. Para $x \in X$ su **clase de equivalencia** respecto a $\sim$ es el conjunto

$$[x] := \{y \in X \mid x \sim y\}.$$

En este caso también se dice que x **representa** la clase de equivalencia $[x]$. El conjunto de las clases de equivalencia se denota por

$$X/{\sim} := \{[x] \mid x \in X\}$$

y se dice que es el **conjunto cociente** de X bajo la relación de equivalencia $\sim$.

0.7.3. Observación. *Las clases de equivalencia son disjuntas. Específicamente, para cualesquiera $x, y \in X$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) $x \sim y$,

2) $[x] = [y]$,

3) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

Asimismo tenemos la descomposición

$$X = \bigcup_{[x] \in X/\sim} [x],$$

*y diferentes conjuntos en la unión son disjuntos; es decir, las clases de equivalencia forman una **partición** de X.*

Demostración. Supongamos que $x \sim y$. Entonces para todo $z \in X$ tenemos (usando que la relación $\sim$ es simétrica y transitiva)

$$z \in [x] \iff x \sim z \Longrightarrow y \sim z \iff z \in [y]$$

y de la misma manera

$$z \in [y] \iff y \sim z \Longrightarrow x \sim z \iff z \in [x].$$

Esto demuestra que 1) implica 2).

Luego 2) obviamente implica 3), ya que $x \in [x]$, y por lo tanto $[x] \neq \emptyset$. Esto usa la hipótesis de que la relación $\sim$ sea reflexiva.

Por fin, 3) implica 1): si existe $z \in [x] \cap [y]$, entonces $x \sim z$ e $y \sim z$, y por la simetría y transitividad $x \sim y$. ■

0.7.4. Ejemplo. Para algún número $n = 1,2,3,4,\ldots$ consideremos la siguiente relación sobre los números enteros $\mathbb{Z}$: se dice que a y b son **congruentes módulo** n y se escribe $a \equiv b \pmod{n}$ si su diferencia es divisible por n:

$$n \mid (a-b) \iff (a-b) = nc \text{ para algún } c \in \mathbb{Z}.$$

El lector puede comprobar que esta es una relación de equivalencia. Hay precisamente n diferentes clases de equivalencia que pueden ser representadas por los números $0,1,\ldots,n-1$. Vamos a usar la notación

$$[a]_n := \{b \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod{n}\}.$$

Tenemos entonces las clases

$$\begin{aligned}
[0]_n &= \{0, \pm n, \pm 2n, \pm 3n, \ldots\},\\
[1]_n &= \{1, 1 \pm n, 1 \pm 2n, 1 \pm 3n, \ldots\},\\
[2]_n &= \{2, 2 \pm n, 2 \pm 2n, 2 \pm 3n, \ldots\},\\
&\vdots\\
[n-1]_n &= \{(n-1), (n-1) \pm n, (n-1) \pm 2n, (n-1) \pm 3n, \ldots\}.
\end{aligned}$$

En este caso el conjunto $\mathbb{Z}/\sim$ se denota por*

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \{[a]_n \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\}.$$ ▲

0.7.5. Ejemplo. Consideremos el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y la relación

$$(a,b) \sim (a',b') \iff ab' = a'b.$$

Esta es una relación de equivalencia: la reflexividad y la simetría deben de ser obvias, y para la transitividad, notamos que si $(a,b) \sim (a',b')$ y $(a,b) \sim (a'',b'')$, entonces tenemos

$$ab' = a'b \quad \text{y} \quad a'b'' = a''b',$$

de donde

$$ab'b'' = a'bb'' = a''bb',$$

y dado que $b' \neq 0$, podemos cancelarlo y concluir que $ab'' = a''b$, lo que significa que $(a,b) \sim (a'',b'')$. La clase de equivalencia de (a,b) normalmente se denota por la fracción $\frac{a}{b}$. De hecho, nuestra relación de equivalencia es precisamente

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \iff ab' = a'b.$$

Este es el modo riguroso de construir los números racionales a partir de los números enteros: se trata de las clases de equivalencia de pares (a,b) con $b \neq 0$.

Para representar cada fracción (clase equivalencia) de manera única, se suelen tomar, por ejemplo, las fracciones $\frac{a}{b}$ con $b > 0$ y $\operatorname{mcd}(a,b) = 1$, pero esto no es necesario y no es siempre conveniente en los cálculos. ▲

0.7.6. Ejemplo. Los números reales $\mathbb{R}$ se construyen a partir de los números racionales como ciertas clases de equivalencia. A saber, se dice que una sucesión de números racionales $(x_n)_n$ es una **sucesión de Cauchy** si para todo número racional $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$|x_m - x_n| < \epsilon \text{ para cualesquiera } m,n > N.$$

*Algunos libros de texto elementales usan la notación "$\mathbb{Z}_n$" para los restos módulo n, pero esta debe evitarse a toda costa porque tiene otro significado: $\mathbb{Z}_p$ es el conjunto de los **números enteros** p**-ádicos**, que es mucho más grande que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: hay sobreyecciónes $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ para cualquier $k = 1,2,3,\ldots$

Consideremos la siguiente relación sobre tales sucesiones:

$$(x_n)_n \sim (y_n)_n \iff \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0.$$

La última condición significa que para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$|x_n - y_n| < \epsilon \text{ para todo } n > N.$$

Esta es una relación de equivalencia, y por definición las clases de equivalencia son los números reales. Por ejemplo, el número $\pi = 3{,}1415\ldots$ puede ser visto como la clase de equivalencia de la sucesión

$$x_0 = 3,\ x_1 = \frac{31}{10},\ x_2 = \frac{314}{100},\ x_3 = \frac{3141}{1000},\ x_4 = \frac{31415}{10000},\ \ldots$$

Esta sucesión no converge a un número racional, pero precisamente por este motivo, se declara formalmente que el "límite" correspondiente es la misma sucesión, módulo la relación $\sim$.

Un número racional $x \in \mathbb{Q}$ corresponde a la sucesión $(x_n)_n$ con $x_n = x$ para todo n, y en este sentido $\mathbb{Q}$ forma un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Por cierto, uno podría decir que los números reales son nada más un conjunto de decimales, pero esto no ayuda mucho: igual hay que trabajar con clases de equivalencia para considerar, por ejemplo, $0{,}499999\ldots$ y $0{,}500000\ldots$ como el mismo número.

Hay otra construcción de los números reales a partir de racionales, conocida como los **cortes de Dedekind**, pero no la voy a revisar aquí.

En este curso tendremos que a asumir la construcción de los números reales y sus propiedades básicas; el lector interesado puede consultar el libro de texto clásico [Rud1989]. ▲

0.7.7. Ejemplo. Consideremos la siguiente relación de equivalencia sobre los números racionales $\mathbb{Q}$:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}.$$

Es fácil comprobar que se trata de una relación de equivalencia y que cada clase de equivalencia puede ser representada de modo único por un número $0 \le \alpha < 1$:

$$\left[\frac{4}{3}\right] = \left[\frac{1}{3}\right], \quad \left[-\frac{5}{4}\right] = \left[-\frac{1}{4}\right] = \left[\frac{3}{4}\right], \quad \text{etc.}$$

—a saber, se puede tomar la parte fraccionaria

$$\alpha := x - \lfloor x \rfloor,$$

donde $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \le x\}$ (cuidado con los signos: $\left\lfloor \frac{5}{4} \right\rfloor = 1$, pero $\left\lfloor -\frac{5}{4} \right\rfloor = -2$).

Los elementos de $\mathbb{Q}/\sim$ son los "números racionales módulo los números enteros". ▲

Técnicamente hablando, $X/\sim$ es un conjunto de subconjuntos de X que son disjuntos y cubren todo X. Sin embargo, hay que pensar en $X/\sim$ como en el mismo conjunto X donde hemos identificado los elementos equivalentes. De todos modos, lo más importante no es la construcción de $X/\sim$, sino su propiedad universal.

0.7.8. Observación (Propiedad universal del cociente $X/\sim$). *Para una relación de equivalencia $\sim$ sobre X, consideremos la aplicación canónica*

$$\begin{aligned} p\colon X &\to X/\sim, \\ x &\mapsto [x]. \end{aligned}$$

Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación que ***es compatible con*** *$\sim$ en el sentido de que para cualesquiera $x, x' \in X$ se tiene*

$$x \sim x' \Longrightarrow f(x) = f(x').$$

Entonces, f ***se factoriza de modo único*** *por p; es decir, existe una aplicación única $\overline{f}\colon X/\!\sim \longrightarrow Y$ tal que $f = \overline{f}\circ p$:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ X/\!\sim \arrow[ur, dashed, "\exists!", "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. La flecha punteada tiene que ser dada por $[x]\mapsto f(x)$. Esta aplicación está bien definida: por nuestra hipótesis, si $[x]=[x']$, entonces $f(x)=f(x')$. ■

0.7.9. Ejemplo. Consideremos la adición y multiplicación de números enteros módulo n: para dos números a y b calculemos su suma y producto habitual y luego tomemos el resto módulo n correspondiente:

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\\ (a,b) &\mapsto [a+b]_n,\\ \cdot\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\\ (a,b) &\mapsto [ab]_n. \end{aligned}$$

La relación de congruencia módulo n induce de modo obvio una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$:

$$(a,b)\sim(a',b') \iff a\equiv a' \pmod{n},\quad b\equiv b' \pmod{n},$$

y el cociente $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\!\sim$ puede ser identificado con $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. De la definición de congruencias se verifica que si

$$a\equiv a' \pmod{n} \quad\text{y}\quad b\equiv b' \pmod{n},$$

entonces

$$a+b\equiv a'+b' \pmod{n} \quad\text{y}\quad ab\equiv a'b' \pmod{n}.$$

Todo esto significa que la adición y multiplicación son compatibles con la relación $\equiv$ y por ende pueden ser definidas sobre los restos módulo n:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \arrow[r, "+"] \arrow[d] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \arrow[r, "\times"] \arrow[d] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

Las flechas punteadas necesariamente están definidas por

$$[a]_n+[b]_n=[a+b]_n,\quad [a]_n\cdot[b]_n=[ab]_n.$$ ▲

0.7.10. Ejemplo. Volvamos a los números racionales, definidos como las fracciones $\frac{a}{b}$ con $a,b\in\mathbb{Z}$, $b\neq 0$, con la relación de equivalencia

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'} \iff ab'=a'b.$$

Como sabemos, si

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'},\quad \frac{c}{d}=\frac{c'}{d'},$$

entonces

$$\frac{ad+bc}{bd}=\frac{a'd'+b'c'}{b'd'},\quad \frac{ac}{bd}=\frac{a'c'}{b'd'}.$$

Esto quiere decir que la adición y multiplicación de fracciones pueden ser definidas como

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}:=\frac{ad+bc}{bd},\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}:=\frac{ac}{bd}.$$

Por supuesto, son las fórmulas bien conocidas del álgebra de Baldor, pero no es suficiente solamente escribirlas: hay que comprobar que las fórmulas son compatibles con la relación de equivalencia (la igualdad de fracciones). ▲

0.7.11. Ejemplo. Definiendo los números reales como clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de números racionales, la suma y el producto se introducen como

$$[(x_n)_n] + [(y_n)_n] := [(x_n + y_n)_n], \quad [(x_n)_n] \cdot [(y_n)_n] := [(x_n\, y_n)_n].$$

La compatibilidad de estas definiciones con la equivalencia es un buen ejercicio de análisis básico. ▲

0.7.12. Ejemplo. De la misma manera, se puede comprobar fácilmente que para los números racionales módulo los números enteros definidos en 0.7.7 tiene sentido tomar la suma

$$[x] + [y] := [x + y].$$

Por ejemplo,

$$\left[\frac{4}{3}\right] + \left[-\frac{5}{4}\right] = \left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{3}{4}\right] = \left[\frac{1}{12}\right].$$

Sin embargo, no hay un modo razonable de definir los productos. La fórmula

$$[x] \cdot [y] := [xy]$$

no funciona: por ejemplo, $\left[\frac{3}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}\right]$, pero

$$\left[\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\right] = [1] = [0], \quad \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right] = \left[\frac{1}{3}\right].$$ ▲

La idea ilustrada por los últimos ejemplos será muy importante en nuestro curso: si sobre X están definidas ciertas operaciones que son compatibles con una relación de equivalencia $\sim$, entonces estas operaciones pueden ser definidas sobre el cociente $X/\sim$.

0.8 Ejercicios

Ejercicio 0.1. Sean A_i, $i \in I$ y B conjuntos.

1) Demuestre que
$$\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B) \quad \text{y} \quad \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B).$$

2) Demuestre que si $A_i \subseteq X$ para todo $i \in I$, entonces
$$X \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(X \setminus A_i) \quad \text{y} \quad X \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(X \setminus A_i).$$

Ejercicio 0.2. Sea X un conjunto. Para dos subconjuntos $A, B \subseteq X$ su **diferencia simétrica** se define por
$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

0) Demuestre que $A \triangle A = \emptyset$ y $A \triangle \emptyset = A$.

1) Demuestre que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

2) Demuestre que $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
Encuentre una fórmula simétrica en A, B, C para este conjunto.

3) Demuestre que $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$.

Ejercicio 0.3. Sean $f\colon X \to Y$ una aplicación, $X_i \subseteq X$, $Y_j \subseteq Y$ familias de subconjuntos.

1) Demuestre que
$$f\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(X_i) \quad \text{y} \quad f\Big(\bigcap_{i\in I} X_i\Big) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(X_i).$$
Encuentre un ejemplo cuando $f(X_1 \cap X_2) \subsetneq f(X_1) \cap f(X_2)$.

2) Demuestre que
$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} Y_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(Y_j) \quad \text{y} \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} Y_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j).$$

Ejercicio 0.4. Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación entre conjuntos. Demuestre las siguientes propiedades.

1a) Para cualquier subconjunto $B \subseteq Y$ se tiene $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.
Además, si f es sobreyectiva, entonces $f(f^{-1}(B)) = B$.

1b) Para cualquier subconjunto $A \subseteq X$ se tiene $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
Además, si f es inyectiva, entonces $f^{-1}(f(A)) = A$.

2a) Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$, entonces $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

2b) Si $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y$, entonces $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

Ejercicio 0.5. Sean X e Y conjuntos finitos.

1) ¿Cuántos elementos tiene $X \times Y$ e $X \sqcup Y$?

2) ¿Cuántos subconjuntos tiene X?

3) ¿Cuántas aplicaciones distintas $X \to Y$ hay?

4) ¿Cuántas biyecciones distintas $X \to X$ hay?

Ejercicio 0.6. Sea $X = \{1,2,3\}$ un conjunto de tres elementos. Describa todas las biyecciones $X \to X$. Compile la tabla de composición de estas biyecciones:

$$\begin{array}{c|ccc} & \cdots & f & \cdots \\ \hline \vdots & & \vdots & \\ g & \cdots & g\circ f & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Ejercicio 0.7. Encuentre una biyección entre el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y algún subconjunto propio $X \subsetneq \mathbb{Z}$.

Ejercicio 0.8. Sean $f\colon X \to Y$ e $g\colon X \to Z$ dos aplicaciones biyectivas. Demuestre que la aplicación

$$\begin{aligned} X &\to Y \times Z, \\ x &\mapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

no es biyectiva si X tiene más de un elemento.

Ejercicio 0.9. Sean X un conjunto finito y $f\colon X \to X$ una aplicación. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

1) f es inyectiva;

2) f es sobreyectiva;

3) f es biyectiva.

Encuentre un contraejemplo para X infinito.

Ejercicio 0.10. Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación entre conjuntos. Definamos la siguiente relación de equivalencia sobre los elementos de X:

$$x \sim x' \iff f(x) = f(x')$$

Demuestre que f induce una biyección

$$\begin{aligned} X/\sim &\to f(X), \\ [x] &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Ejercicio 0.11. Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación.

1) Asumamos que $X \neq \emptyset$. Demuestre que f es inyectiva si y solo si existe una aplicación $r\colon Y \to X$ tal que $r \circ f = \mathrm{id}_X$.

2) Demuestre que f es sobreyectiva si y solo si existe una aplicación $s\colon Y \to X$ tal que $f \circ s = \mathrm{id}_Y$[*].

[*]De hecho, este resultado es equvalente al **axioma de elección**.

Bibliografía

[Rud1989] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3 ed., McGraw-Hill, 1989.

[SV2002] A. Shen and N. K. Vereshchagin, *Basic set theory*, Student Mathematical Library, Volume 17, American Mathematical Society, 2002.