Teorema fundamental del álgebra

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

Universidad de El Salvador. 2018

El propósito de esta nota es demostrar el **teorema fundamental del álgebra**.

0.1. Teorema. *Sea $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio no constante. Entonces, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = 0$.*

Este resultado aparece en el tratado de d'Alembert[*] "Recherches sur le calcul intégral" (1748) y fue probado de manera rigurosa en la tesis de doctorado de Gauss, publicada en 1799. El nombre "teorema fundamental del álgebra" parece un poco ridículo en un curso del álgebra moderna, pero es histórico y bastante común. Sin duda, es uno de los resultados más importantes en las matemáticas.

Aunque el estudio de raíces de polinomios pertenece al terreno del álgebra, la misma construcción de los números complejos es analítica y por ende cualquier prueba del teorema fundamental del álgebra debe usar análisis. Para una prueba estándar puramente analítica, refiero a [Vin2003, §3.3]. El argumento de abajo es *topológico*, basado implícitamente en el **grupo fundamental** del círculo. Para más detalles, véase [May1999, Chapter 1].

1 Grado de aplicación $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$

Consideremos el circulo unitario en el plano complejo

$$\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

y la aplicación

$$\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, \quad x \mapsto e^{2\pi i x}.$$

Esta es una aplicación continua y es un homomorfismo sobreyectivo de grupos $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{S}^1, \times)$. Su núcleo es precisamente $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$:

$$\exp(x) = e^{2\pi i x} = 1 \iff x \in \mathbb{Z}.$$

Para obtener una aplicación inyectiva, se puede restringir $\exp$ al intervalo abierto $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$. Como se sabe del análisis complejo, esta restricción tiene una aplicación inversa

$$\log\colon \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\} \to \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$$

que es también continua.

1.1. Lema del levantamiento. *Para toda aplicación continua $f\colon [0,1]^n \to \mathbb{S}^1$ con $f(\underline{0}) = 1$ existe una aplicación continua $\widetilde{f}\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ que satisface*

$$\exp(\widetilde{f}(\underline{x})) = f(\underline{x}), \quad \widetilde{f}(\underline{0}) = 0.$$

Además, estas condiciones definen a $\widetilde{f}$ de modo único.

[*] Jean le Rond D'Alembert (1717–1783), matemático, filósofo y enciclopedista francés, conocido por sus contribuciones en análisis, particularmente las ecuaciones diferenciales.

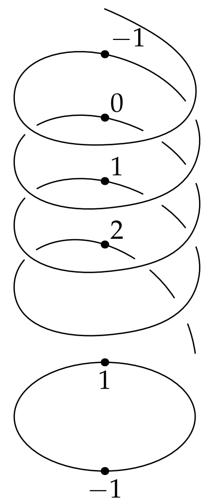

Figura 1: La aplicación $x \mapsto e^{2\pi i x}$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \arrow[d, "\exp"] \\
{[0,1]^n} \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] & \mathbb{S}^1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, mapsto] \\
\underline{0} \arrow[r, mapsto] \arrow[ur, mapsto] & 1
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Primero, probemos la unicidad de $\widetilde{f}$. Supongamos que hay dos aplicaciones continuas $\widetilde{f}_1$ y $\widetilde{f}_2$ que cumplen

$$\exp(\widetilde{f}_1(\underline{x})) = \exp(\widetilde{f}_2(\underline{x})) = f(\underline{x}), \quad \widetilde{f}_1(\underline{0}) = \widetilde{f}_2(\underline{0}) = 0.$$

La primera ecuación implica que

$$\widetilde{f}_1(\underline{x}) - \widetilde{f}_2(\underline{x}) \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, la aplicación $\widetilde{f}_1(\underline{x}) - \widetilde{f}_2(\underline{x})$ es continua sobre el conjunto conexo $[0,1]^n$ y toma valores enteros, pero esto significa que es constante. Luego, para cualquier $\underline{x} \in [0,1]^n$

$$\widetilde{f}_1(\underline{x}) - \widetilde{f}_2(\underline{x}) = \widetilde{f}_1(\underline{0}) - \widetilde{f}_2(\underline{0}) = 0.$$

Ahora tenemos que establecer la existencia de $\widetilde{f}$. La aplicación $f\colon [0,1]^n \to \mathbb{S}^1$ es continua y el cubo $[0,1]^n$ es compacto, entonces f es uniformemente continua. Gracias a esto, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\underline{x} - \underline{y}\| < \delta \Longrightarrow |f(\underline{x}) - f(\underline{y})| < 2 \Longrightarrow f(\underline{x}) \neq -f(\underline{y}).$$

Fijemos un número natural N tal que $\frac{1}{N}\|\underline{x}\| < \delta$ para todo $x \in [0,1]^n$ (esto es posible gracias a la compacidad de $[0,1]^n$). Pongamos

$$\widetilde{f}(\underline{x}) := \sum_{0 \le k \le N-1} \log\left(\frac{f\left(\frac{k+1}{N}\,\underline{x}\right)}{f\left(\frac{k}{N}\,\underline{x}\right)} \right).$$

Por nuestra elección de N, tenemos

$$\frac{f\left(\frac{k+1}{N}\,\underline{x}\right)}{f\left(\frac{k}{N}\,\underline{x}\right)} \neq -1$$

para ningún $\underline{x} \in [0,1]^n$, así que $\tilde{f}$ es una aplicación continua bien definida. Luego,

$$\exp(\tilde{f}(\underline{x})) = \frac{f\left(\frac{1}{N}\underline{x}\right)}{f(\underline{0})} \frac{f\left(\frac{2}{N}\underline{x}\right)}{f\left(\frac{1}{N}\underline{x}\right)} \cdots \frac{f\left(\frac{N-1}{N}\underline{x}\right)}{f\left(\frac{N-2}{n}\underline{x}\right)} \frac{f(\underline{x})}{f\left(\frac{N-1}{N}\underline{x}\right)} = f(\underline{x}),$$

y claramente,

$$\tilde{f}(\underline{0}) = \log(f(\underline{0})) = \log(1) = 0.$$

■

1.2. Definición. Un **lazo** en $\mathbb{S}^1$ es una aplicacion continua $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ que satisface $\gamma(1) = 1$.

Una **homotopía** entre dos lazos γ_0 y γ_1 es una aplicación continua

$$h\colon [0,1] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$$

tal que

$$h(0,z) = \gamma_0(z), \quad h(1,z) = \gamma_1(z), \quad h(t,1) = 1$$

para cualesquiera $t \in [0,1]$, $z \in \mathbb{S}^1$.

En otras palabras, una homotopía define una familia de lazos $\gamma_t\colon z \mapsto h(t,z)$ que dependen de manera continua del parámetro $t \in [0,1]$.

1.3. Definición. Dado un lazo $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\to \mathbb{S}^1, \\ x &\mapsto \gamma(\exp(x)). \end{aligned}$$

Ahora según 1.1, existe una aplicación continua única $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ que satisface

$$\exp(\tilde{f}(x)) = f(x), \quad \tilde{f}(0) = 0.$$

En particular,

$$\exp(\tilde{f}(1)) = f(1) = \gamma(1) = 1,$$

así que $\tilde{f}(1) \in \mathbb{Z}$. El número $\tilde{f}(1)$ se llama el **grado** del lazo γ y se denota por $\deg\gamma$.

Intuitivamente, $\deg\gamma$ nos dice cuántas vueltas en el sentido antihorario da γ alrededor del circulo $\mathbb{S}^1$.

1.4. Ejemplo. El lazo constante

$$\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \quad z \mapsto 1$$

tiene grado nulo: en efecto, a este lazo corresponde la aplicación constante

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1, \quad x \mapsto 1,$$

que se levanta a la aplicación constante

$$\tilde{f}\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 0.$$

▲

1.5. Ejemplo. Consideremos el lazo

$$\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \quad z \mapsto z^n.$$

A este corresponde la aplicación

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1, \quad x \mapsto e^{2\pi i n x}$$

que se levanta a la aplicación

$$\widetilde{f}(x) = nx.$$

En efecto, tenemos

$$\exp(\widetilde{f}(x)) = e^{2\pi i n x} = f(x), \quad \widetilde{f}(0) = 0.$$

Podemos concluir que

$$\deg\gamma = \widetilde{f}(1) = n.$$

▲

Es fácil convencerse intuitivamente que al deformar un lazo de manera continua, el número de vueltas que este da alrededor del círculo $\mathbb{S}^1$ no cambia. Esto se refleja en el siguiente resultado.

1.6. Lema. *Si entre dos lazos γ_0 y $\gamma_1 \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ existe una homotopía, entonces*

$$\deg\gamma_0 = \deg\gamma_1.$$

Demostración. Consideremos una homotopía

$$h\colon [0,1] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$$

tal que

$$h(0,z) = \gamma_0(z), \quad h(1,z) = \gamma_1(z).$$

Definamos una aplicación

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] \times [0,1] &\to \mathbb{S}^1, \\ (t,x) &\mapsto h(t,\exp(x)). \end{aligned}$$

De nuevo, podemos invocar el lema del levantamiento 1.1 para concluir que existe una aplicación continua

$$\widetilde{f}\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

que satisface

$$\exp(\widetilde{f}(t,x)) = f(t,x), \quad \widetilde{f}(0,0) = 0.$$

En particular, se tiene

$$\exp(\widetilde{f}(t,0)) = h(t,1) = 1,$$

lo que implica que $\widetilde{f}(t,0) \in \mathbb{Z}$. La aplicación $t \mapsto \widetilde{f}(t,0)$ es continua, definida sobre el intervalo conexo $[0,1]$, y dado que sus valores son enteros, esta debe ser constante. Tenemos $\widetilde{f}(0,0) = 0$, de donde podemos concluir que

$$\widetilde{f}(t,0) = 0 \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Además,

$$\exp(\widetilde{f}(0,x)) = \gamma_0(\exp(x)), \quad \exp(\widetilde{f}(1,x)) = \gamma_1(\exp(x)).$$

Esto significa que $\widetilde{f}(0,x)$ y $\widetilde{f}(0,y)$ son levantamientos de los lazos γ_0 y γ_1 respectivamente, y luego

$$\deg\gamma_0 = \widetilde{f}(0,1), \quad \deg\gamma_1 = \widetilde{f}(1,1).$$

Notamos que

$$\exp(\widetilde{f}(t,1)) = h(t,\exp(1)) = h(t,1) = 1,$$

así que $\widetilde{f}(t,1) \in \mathbb{Z}$. De nuevo, se tiene una aplicación continua $t \mapsto \widetilde{f}(t,1)$ definida sobre el intervalo conexo $[0,1]$ que toma valores enteros, entonces es constante. En particular,

$$\deg\gamma_0 = \widetilde{f}(0,1) = \widetilde{f}(1,1) = \deg\gamma_1.$$

■

1.7. Comentario. De hecho, se puede probar que si $\deg \gamma_0 = \deg \gamma_1$, entonces entre los lazos γ_0 y γ_1 hay una homotopía. Sin embargo, no lo vamos a necesitar en la prueba de abajo.

1.8. Comentario. Para una curva $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se puede definir el grado (también conocido como el **índice** o **número de rotación**) mediante la integral

$$\deg \gamma = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dz}{z}.$$

Con esta definición, para deducir que $\deg \gamma \in \mathbb{Z}$ y $\deg \gamma$ es invariante respecto a homotopía, se usa la **fórmula integral de Cauchy**. Véase por ejemplo [Lan1999, Chapter III] para los detalles.

2 Prueba del teorema

Consideremos un polinomio complejo

$$f = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

Asumamos que f no tiene raíces: $f(z) \neq 0$ para ningún $z \in \mathbb{C}$. Definamos un lazo

$$\begin{aligned} \gamma\colon \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{S}^1, \\ z &\mapsto \frac{f(z)}{|f(z)|} \frac{|f(1)|}{f(1)}. \end{aligned}$$

Para $t \in [0,1]$ pongamos

$$h_1(t,z) := \begin{cases} \dfrac{f(z/t)\, t^n}{|f(z/t)\, t^n|} \dfrac{|f(1/t)\, t^n|}{f(1/t)\, t^n}, & t \neq 0, \\ z^n, & t = 0. \end{cases}$$

Notamos que

$$\lim_{t\to 0} h_1(t,z) = z^n$$

y

$$h_1(1,z) = \gamma(z),$$

así que $h_1\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$ es una aplicación continua que define una homotopía entre el lazo $z \mapsto z^n$ y γ. Entonces,

$$\deg \gamma = \deg(z \mapsto z^n) = n.$$

Por otro lado, podemos definir

$$h_2(t,z) := \frac{f(tz)}{|f(tz)|} \frac{|f(t)|}{f(t)}.$$

Tenemos

$$h_2(0,z) = \gamma(0) = 1, \quad h_2(1,z) = \gamma(z),$$

así que h_2 define una homotopía entre el lazo constante $z \mapsto 1$ y γ, así que

$$\deg \gamma = 0.$$

Entonces, si $n > 0$, tendríamos una contradicción. Podemos concluir que todo polinomio complejo no constante debe tener una raíz. ∎

Referencias

[Lan1999] Serge Lang, *Complex analysis*, 4 ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 103, Springer-Verlag, New York, 1999.
http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-3083-8

[May1999] J.P. May, *A concise course in algebraic topology*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 1999.
https://www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf

[Vin2003] E. B. Vinberg, *A course in algebra*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 56, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003, Translated from the 2001 Russian original by Alexander Retakh. MR1974508
https://doi.org/10.1090/gsm/056